Министерство образования и науки РС (Я)
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
РС (Я) «Ленский технологический техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Дисциплина: ОДП. 01 Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия

Профессия: 46.01.03 Делопроизводитель

Ленск, 2022

Методические рекомендации по выполнению практических работ по математике разработаны в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта по профессии среднего профессионального образования **46.01.03 Делопроизводитель** и на основании Положения об организации самостоятельной работы в техникуме и методических рекомендаций об организации самостоятельной работы в условиях реализации ФГОС, утвержденных Учебно-методическим советом ГБПОУ РС (Я) «Ленский технологический техникум»

РЕКОМЕНДОВАНО
Учебно-методическим советом
ГБПОУ РС (Я) «Ленский технологический техникум»

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Республики Саха (Якутии)
«Ленский технологический техникум»
Учебно методический совет
Протокол № 11
«30» июня 2022 г.

РАССМОТРЕНО И ОДОБРЕНО
на заседании ПЦК «Общеобразовательных дисциплин»

Протокол № 10
от "17" июня 2022 г.
Председатель ПЦК: ______ /Еремеева Т.С./

Автор: Антонова И.А., преподаватель ГБПОУ РС (Я) «Ленский технологический техникум»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Сборник содержит методические указания по выполнению практических работ по дисциплине: Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия.

Цель настоящих методических указаний – дать студенту необходимые методические указания по организации и выполнению практических работ в период учебного процесса.

Проведению каждой работы предшествует контроль и подготовка к ней. Для этого по рекомендуемым учебным пособиям, лекциям и настоящему сборнику следует разобраться в содержании заданной практической работы, усвоить основные положения, необходимые для ее выполнения.

Студенты должны проявлять научный и практический интерес к практическим занятиям, строго выполнять учебный график, ставить поисковые вопросы и задачи. Кроме того, студент должен самостоятельно работать с литературой и УМК, а также кратко и четко выражать свои мысли при защите работы.

В процессе проведения практических работ реализуются комплексная проверка следующих знаний и умений:

Результаты обучения З,У (Код)	Показатели оценки результата
У.1	- выполняет арифметические действий над числами (целыми, действительными и рациональными; отрицательными и положительными); - умеет находить приближенные значения величин и погрешностей вычислений (абсолютная и относительная); - умеет сравнивать числовые выражения; - находит значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; - выполняет преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций; - умеет вычислять значения функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции; - умеет строить графики изученных функций; - находит производные элементарных функций; - использует производные для изучения свойств функций и построения графиков; - применяет производную для проведения приближенных вычислений, решения задач прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения; - умеет вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла; -умеет решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичных неравенств и систем; - распознаёт на чертежах и моделях пространственных форм;

	- описывает взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументация своих суждений об этом расположении; - анализирует в простейших случаях взаимного расположения объектов в пространстве; - выполняет чертежи по условиям задач; - умеет строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды; - решает планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); - использует при решении стереометрических задач планиметрических фактов и методов; - проводит доказательные рассуждения в ходе решения задач.
У.2	- умеет использовать графический метод решения уравнений и неравенств; - умеет изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными; - знает определение свойств функции по её графику - умеет составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.
З.1	- выполняет практические расчеты по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства; - интерпретирует графики реальных процессов; - исследует и проводит построение правильных многогранников на основе изученных формул и свойств геометрических фигур; - называет последовательность действий при решении систем уравнений разложением на множители, введением новых неизвестных, подстановкой, графическим методом; - формулирует определения и перечисляет свойства скалярного, векторного и смешанного произведения векторов; - формулирует правила дифференцирования и называет производные основных элементарных функций; - называет табличные интегралы; - формулирует классическое определение вероятности; - знает последовательность действий при выполнении арифметических действий над числами; - находит приблизительные значения величин; - исследует функции и строит графики; - преобразует графики функций; - использует формулы для преобразования простейших тригонометрических выражений и решения тригонометрических уравнений и неравенств; - преобразует выражения, содержащие степень с рациональным показателем, радикалы; - преобразует логарифмические выражения; - решает иррациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства; - находит производные функций, используя формулы дифференцирования; - пользуется геометрическими преобразованиями пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости при изображении пространственных фигур; - находит поверхности, вычисляет объемы многогранников и круглых тел.

З.2	- пользуется формулами вычисления длин, площадей и объемов реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства; - пользуется аппаратом математического анализа при решении геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, в том числе задач на наибольшие и наименьшие значения; - анализирует реальные числовые данные, представленные в виде диаграмм, графиков; - анализирует информацию статистического характера; - знает формулировку геометрического и механического смысла производной; - знает приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, пути, пройденного точкой; - умеет описывать процесс в естествознании и технике с помощью дифференциальных уравнений.

Критерии оценки практических работ:

Показатели оценивания практической работы

Наименование ОПОР	**25 баллов**	**20 баллов**	**15 баллов**	**10 баллов**
1.Владение знаниями терминологии	Знает и понимает термины и определения	Знает и понимает термины и определения, но допускает незначительные ошибки	В целом понимает, но допускает ошибки в знании терминологии и определений, исправляет после замечаний	Не раскрывает содержание термина, неуместно применяет термины
2.Результативность информационного поиска	Информация найдена верно, небольшие недочеты исправляются студентом сразу, помогает в поиске информации одногруппникам	Информация найдена не полная с неточностями, которые студент исправляет самостоятельно	Студент самостоятельно, в срок, с недочетами выполняет задания, с помощью преподавателя делает выводы	Информация найдена не полная с неточностями, которые студент не может исправить без помощи преподавателя
3.Скорость и техничность выполнения заданий	Студент самостоятельно, в срок и верно выполняет задания, делает выводы, помогает одногруппникам	Студент самостоятельно, в срок, с небольшими недочетами выполняет задания, делает выводы, помогает одногруппникам	Студент самостоятельно, в срок, с недочетами выполняет задания, с помощью преподавателя делает выводы	Студент с помощью преподавателя, несвоевременно, с недочетами выполняет задания, с помощью преподавателя делает выводы
4.Оформление заданий	Задания оформляет аккуратно в соответствии с требованиями преподавателя, в соответствии с ГОСТ	Задания оформляет аккуратно, но имеются замечания	Задания выполняет неаккуратно, со значительными замечаниями	Оформление не соответствует требованиям
5.Аргументированность суждений, широта кругозора	В письменной и устной речи приводит примеры, факты, описывает явления, производит сравнения, анализ, делает выводы	В письменной и устной речи приводит примеры, факты, описывает явления, производит сравнения, анализ, делает выводы, но	Приводит примеры, описывает явления, факты, но затрудняется в логическом изложении, анализе, сравнении, выводах	Приводит примеры, факты, описывает явления, не делает выводы, сравнения

		затрудняется в построении логического изложения материала		
6.Поиск, обработка и предоставление информации по изучаемому материалу	Работает с литературой, поисковыми системами, подготовленная информация соответствует темам задания, полно раскрыта, отображена, при необходимости сопровождается наглядностью (схемами, рисунками), предоставляется логично в соответствии с требованиями, даются ссылки на источники	Работает с литературой, поисковыми системами, подготовленная информация соответствует темам задания, полно раскрыта, предоставление информации не в полной мере соответствует требованиям	Недостаточно проведен сбор и обработка информации, предоставление информации не соответствует требованиям	Проведен поиск и сбор информации, тема не раскрыта, или не соответствует заданию
7.Использование учебно-лабораторного оборудования для решения практических задач (измерительные приборы и инструменты)	Знает устройство, назначение, методы работы с учебно-лабораторным оборудованием, производит работы с применением учебно-лабораторного оборудования в соответствии с требованиями и технологией, соблюдает технику безопасности, бережно относится к оборудованию. Может оказать помощь в работе одногрупникам	Знает устройство, назначение, методы работы с учебно-лабораторным оборудованием, но допускает ошибки в работе с учебно-лабораторным оборудованием, соблюдает технику безопасности, бережно относится к оборудованию	Не в полной мере владеет знаниями устройства, назначения, методами работы с учебно-лабораторным оборудованием. Производит работы с замечаниями, соблюдает технику безопасности	Не в полной мере владеет знаниями устройства, назначения, методами работы с учебно-лабораторным оборудованием. Производит работы с нарушением технологии, принципов работы, имеет замечания по технике безопасности
8.Время на выполнение задания	Соблюдение время и	Превышение времени	Превышение времени	Превышение времени

	подготовки задания, сроков сдачи заданий.	выполнения на 10 %	выполнения на 20%	выполнения на 30 и более %

Методика проведения контроля и критерии оценки работ

Каждая практическая работа выполняется студентами в ходе учебного занятия или во время, отведённое на самостоятельную внеаудиторную работу студента по индивидуальным заданиям после изучения соответствующей темы.

Работа оценивается по пятибалльной системе:

Оценка 5 (отлично) выставляется в случаях полного выполнения всего объёма работы, отсутствия существенных ошибок при вычислениях и построениях графиков и рисунков, грамотного и аккуратного выполнения всех заданий, наличия вывода.

Оценка 4 (хорошо) выставляется в случае полного при наличии выполнения всего объёма работы и несущественных ошибок при вычислениях и построении графиков и рисунков, не влияющих на общий результат решения.

Оценка 3 (удовлетворительно) выставляется в случаях в основном полного выполнения работы при наличии ошибок, которые не оказывают существенного влияния на окончательный результат.

Оценка 2 (неудовлетворительно) выставляется в случае, когда допущены принципиальные ошибки (перепутаны формулы, нарушена последовательность вычислений, отсутствует перевод физических величин в систему СИ и т.д.).

В течение всего времени обучения студенту предоставляется возможность повысить результаты усвоения учебной дисциплины путём повторного выполнения другого варианта.

Практические работа

Практическая работа №1: Тренажеры по теме: Целые и рациональные числа.

Цель: повторить действия над целыми и рациональными числами.

Форма организации студентов на занятии: индивидуальная.

Методические указания.

Дроби делятся на обыкновенные и десятичные. Десятичная дробь- это, по существу другая форма записи. В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10. Если к десятичной дроби приписать справа нуль или несколько нулей, то получится равная ей дробь. Если десятичная дробь оканчивается одним или несколькими нулями, то

эти нули можно отбросить- получится равная ей дробь.

При сложении десятичных дробей надо записать их одну под другой так, чтобы одинаковые разряды были друг под другом , а запятая -под запятой, и сложить дроби так, как складывают натуральные числа. В ответе запятая располагается под запятыми Например,

+	0,	1	2
	1,	0	5
	1,	1	7

.

Аналогично выполняется вычитание десятичных дробей. При умножении десятичных дробей достаточно перемножить заданные числа, не обращая внимания на запятые (как натуральные числа), а затем в результате справа отделить запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях суммарно.

	×	2,	1	2
		0,	1	3
		6	3	6
	2	1	2	
0,	2	7	5	6

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натурального числа на натуральное, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части.   Для того чтобы разделить десятичную дробь на десятичную нужно и в делимом и в делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их имеется в делителе.   Для того чтобы сложить (или вычесть)   две обыкновенные дроби с разными знаменателями нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем сложить

(вычесть) числитель первой дроби с числителем второй дроби, а

знаменатель оставить тем же. Например $\frac{7}{9}+\frac{5}{12}=\frac{28}{36}+\frac{15}{36}=\frac{43}{36}=1\frac{7}{36}$ Произведение двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель равен произведению знаменателей. Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно 1. Например, 3 и $\frac{1}{3}$. При делении обыкновенной дроби на обыкновенную дробь числитель делимого умножают на знаменатель делителя, а знаменатель делимого- на числитель делителя. Первое произведение служит числителем, а второе знаменателем частного.

1 вариант

1. Вычислите значения выражений:

   а) $\frac{2}{7}+\frac{11}{21}+\frac{321}{49}$;

b) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{5}\right)\cdot 0,7:\frac{86}{17}.$

2. Представьте в виде обыкновенной дроби:
   a) 0,125;
   b) 0,46;
   c) 1,328.
3. Представьте в виде десятичной дроби:

$$a)\frac{1}{125};\quad b)\frac{3}{16};\quad c)\frac{128}{25}.$$

2 вариант

1. Вычислите значения выражений:
   a) $\frac{5}{6}+\frac{7}{33}+\frac{9}{22};$
   b) $\frac{6}{11}:\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{40}+0,01.$
2. Представьте в виде обыкновенной дроби:
   a) 0,314;
   b) 0,58;
   c) 7,11.
3. Представьте в виде десятичной дроби:

$$a)\frac{1}{625};\quad b)\frac{7}{16};\quad c)\frac{273}{13}.$$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 6-7 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 4-5 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 4 заданий

Практическая работа №2: Тренажеры по теме: Комплексные числа

Цель: Познакомить с комплексными числами . Отработать навыки сложения, вычитания умножения, деления комплексныхчисел, заданных в алгебраической форме. А также нахождениемодуля комплексного числа.

Методические указания. Для решения многих задач физики, электротехники и других наук оказалось недостаточно множества действительных чисел. Приведем пример. Для уравнения $x^2+1=0$

действительных корней не имеет. В связи с этим возникла потребность нового расширения понятия числа. Комплексными числами называются числа вида $\boldsymbol{z = a + bi}$, где а и b- действительные числа, а число i, определяется равенством $\boldsymbol{i^2} = -1$, называемой мнимой единицей. Два комплексных числа

$\boldsymbol{z_2 = a_2 + b_2 i}$ и $\boldsymbol{z_1 = a_1 + b_1 i}$ называются равными если $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_2$.

Запись комплексного числа в виде $\boldsymbol{z = a + bi}$ называется алгебраической формой записи комплексного числа. Действительное число а называется действительной частью комплексного числа, а bi- его мнимой частью .Два комплексных числа называются взаимно сопряженными (обозначают z и $\overline{\mathrm{z}}$), если их действительные части равны, а мнимые отличаются знаками.

Например , $z = 5 - 7i,\ \bar{z} = 5 + 7i.$ Комплексные числа $(a + bi)$и$(-a - bi)$ называются противоположными. Модулем комплексного числа

$= \boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a; b}$ $z = a + bi$ называют действительное число r=$\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$. Комплексное чис $\boldsymbol{z}$ $\boldsymbol{+ bi}$ на координатной плоскости изображается точкой с координатой

( )

Сложение двух комплексных чисел выполняется по формуле

$(\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1\mathrm{i}) + (\mathrm{a}_2 + \mathrm{b}_2\mathrm{i}) = (\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2) + (\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2)\mathrm{i}$.

Умножение комплексных чисел, выполняется по правилу умножения двучлена на двучлен с учётом $\mathrm{i}^2 = -1$.

Для того чтобы разделить одно комплексное число на другое нужно числитель и знаменатель умножить на число сопряженное знаменателю и упростить.

Пример.

$$(2 + 3i)(1 + 2i) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2i + 3i \cdot 1 + 3i \cdot 2i = 2 + 4i + 3i - 6 = -4 + 7i$$

$$\frac{(2 + 3\mathrm{i})}{(1 + 2\mathrm{i})} = \frac{(2 + 3\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i})}{(1 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i})} = \frac{2 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + 6}{1 + 4} = \frac{8 - \mathrm{i}}{5}$$

1 вариант

1) Вычислите сумму, разность, произведение и частное чисел z_1=2i-3 и z_2=8+5i.

2) Вычислите:

a) $(7 + 2i)^2$;

b) (6+8i)·(6-8i)

3) Найдите модуль комплексного числа:

a) -2i;

b) 3+4i

2 вариант

1) Вычислите сумму, разность, произведение и частное чисел $z_1=4+5i$ и $z_2=2-3i$

2) Вычислите:

a) $(3-4i)^2$;

b) $(7+9i)\cdot(7-9i)$

3) Найдите модуль комплексного числа:

a) $3i$;

b) $12-5i$

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №3: Тренажеры по теме: Корни и степени

Цель: Отработать навыки вычисления степеней, используя их свойства.

Свойства степеней: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $a^m \cdot c^m = (ac)^m$ $a^0 = 1$

Пример № 1. Исключить иррациональность в знаменателе $\frac{a}{1-\sqrt{a}} =$

$\frac{a\cdot(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \frac{a+\sqrt{a}}{1-a}$.

Вариант 1

Вычислите:

1. $\sqrt{8,41}$
2. $\sqrt[3]{3,43\cdot 10^5}$
3. $2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

4. $\left(8-37^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(8+37^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

5. $(54\cdot 250)^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}-128^{\frac{1}{6}}$.

Вариант 2

Вычислите:

1. $\sqrt{6{,}25}$
2. $\sqrt[4]{1{,}296\cdot 10^{-5}}$
3. $5^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{\frac{5}{42}}\cdot 5^{-\frac{2}{7}}$
4. $\sqrt{7+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{6}}$
5. $125^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}-21\cdot 6^{\frac{1}{3}}$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №4: Тренажеры по теме: Корень n-степени

Цель: Отработать навыки вычисления корней, используя их свойства.

Методические указания.

При преобразовании арифметических корней используются их свойства

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ **2)** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{k}=\sqrt[n]{a^{k}}$ **4)** $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

5) $\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^{k}}$ **6)** $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}}$ **7)** $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$

Пример№1. Извлечь корень из произведения$\sqrt[3]{a^3b^9} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^9} = ab^3$

Пример №2. Вынести множитель из под знака корня$\sqrt{45a^5} = \sqrt{9a^4 5a} =$

$3a^2\sqrt{5a}$.

Тождество $\sqrt{a^2} = |a|, \text{т. е } \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{если } a > 0, \\ -a, \text{если } a \le \mathbf{0} \end{cases}$

Если a≥ 0 и n-натуральное число, больше 1, то существует, и только одно, неотрицательное число x, такое, что выполняется условие $x^n = a$. Это число x называется арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt{\ }$. Число a называется подкоренным выражением, n-показатель корня. Если n=2, то обычно пишут $\sqrt{a}$(опуская показатель корня) и называют это выражение квадратным корнем.

Вариант 1

1. Упростите выражение: $2\sqrt{x} + 5\sqrt{25x} - 3\sqrt{36x} - 4\sqrt{9x}$.
2. Вычислите: $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.
3. Упростите выражение: $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Вариант 2

1. Упростите выражение: $\sqrt{16x} + \sqrt[3]{8x} - 2\sqrt[3]{27x} + \sqrt{9x}$.
2. Вычислите: $\sqrt[3]{12+\sqrt{19}} \cdot \sqrt[3]{12-\sqrt{19}}$.
3. Упростите выражение: $\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} + \frac{a^2 - a\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} - \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \frac{4a\sqrt{b}}{a^2-b}$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнено любое 1 задание
«Неудовлетворительно»	Не выполнено ни одного задание

Практическая работа №5: Тренажеры по теме: Степени

Цель: Отработать навыки вычисления степеней, используя их свойства.

Свойства степеней: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\quad a^m \cdot c^m = (ac)^m$ $\quad a^0 = 1$

Вариант 1

1. Запишите выражение в виде степени одного числа или выражения: $\left(\left(\frac{1}{9}:\frac{8}{27}\right):\frac{16}{48}\right):\frac{81}{256}\cdot\frac{1}{2}$.
2. Упростите выражение: $\left(\frac{xy^2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x^2y}{3}\right)^2$.
3. Вычислите: $0{,}027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^0-3^{-1}+5{,}5^0$.

Вариант 2

1. Запишите выражение в виде степени одного числа или выражения: $\left(\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{4}:\frac{25}{16}\right):\frac{32}{16}\cdot 16\right)$.
2. Упростите выражение: $2x^2y^{-3}\left(\frac{x^{-1}y^4}{2\sqrt{y^3}}\right)^2$.
3. Вычислите: $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0\right)^{-0,5}-7{,}5\cdot 4^{-\frac{6}{4}}-(-2)^{-4}+81^{0,25}$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнено любые 1 задание
«Неудовлетворительно»	Не выполнено ни одно задание

Практическая работа №6: Тренажеры по теме: Логарифмы

Цель: отработка навыков решения упражнений на решение логарифмических выражений .

Форма организации студентов на занятии: индивидуальная.

Методические указания.

I. $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

II. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

III. $\log_a x^k = k\log_a x$

IV. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$

V. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

VI. $a^{\log_a b} = b$

Вариант 1

1. Вычислите

1) $\log_5 125$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$;

3) $0{,}5^{\log_{0,5} 12}$;

4) $\log_6 12 + \log_6 3$

2. Найдите x

$\log_3 x = 4\log_3 3 - 2\log_3 4$

Вариант 2

1. Вычислите

1) $\log_{\frac{1}{4}} 64$;

2) $\log_7 49$;

3) $8^{\log_8 13}$;

4) $\lg 5000 - \lg 5$

2. Найдите x

$\log_6 x = 3\log_6 2 + \frac{1}{2}\log_6 25$

Вариант 3

1. Вычислите

1) $\log_3 81$;

2) $\log_{\frac{1}{7}} 243$;

3) $0{,}01^{\log_{0,1} 3}$;

4) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 15$

2. Найдите x

$$\log_9 x = 2\log_9 4 + \log_9 7$$

Вариант 4

1. Вычислите

1) $\log_4 \frac{1}{64}$;

2) $\log_6 216$;

3) $10^{2\lg 3}$;

4) $\log_{12} 72 + \log_{12} 2$

2. Найдите x

$$\log_{\frac{1}{7}} x = 2\log_{\frac{1}{7}} 6 - \log_{\frac{1}{7}} 4$$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №7: Тренажеры по теме: Показательные и логарифмические функции

Цель: отработка навыков построения графиков.

Форма организации студентов на занятии: фронтальная.

Методические указания. Пусть функция задана аналитически формулой y=f(x).Если на координатной плоскости отметить все точки, обладающие следующим свойством: абсцисса точки принадлежит области определения функции, а ордината равна соответствующему значению функции, то множество точек (x;f(x))есть график функции. На практике для построения графика функции составляют таблицу значений функции при некоторых значениях аргумента, наносят соответствующие точки и соединяют полученные точки линией. При этом предполагают, что график функции является плавной линией, а найденные точки достаточно точно показывают ход изменения функции. Для того, чтобы начать строить графики функций давайте повторим ещё как на координатной плоскости наносят точки. Итак, нам надо нанести точку с координатами(1;2)это значит x=1, y=2. Проводят линии x=1 и y=2 и на пересечении этих линий иполучая х Пример . Построить график функции

Область определения х- любое число. $y = 2x + 1$- это прямая. Пусть $x = 0$, тогда $y(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.

Пусть $x = 2$, тогда $y(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Для построения прямой линии достаточно двух точек (0;1) и (2;5).

1 вариант

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = \left(\dfrac{1}{8}\right)^x$; 2) $y = 34^x$.

2. Сравните числа:

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ и $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}$; 2) 45^3 и 45^4;

3. Постройте схематически график функции:

1) $y = \log_{0.4} x$; 2) $y = \log_5 x$

2 вариант

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = 89^x$; 2) $y = \left(\dfrac{4}{9}\right)^x$

2. Сравните числа:

1) $12^{5,6}$ и 12^7; 2) $\left(\dfrac{9}{11}\right)^{-5}$ и $\left(\dfrac{9}{11}\right)^{-1}$;

3.Постройте схематически график функции:

1) $y = \log_{0.7} x$; 2) $y = \log_{12} x$

3 вариант

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = 0{,}06^x$; 2) 56^x

2. Сравните числа:

1) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{8,6}$ и $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{4}$; 2) 21^{-5} и 1;

3.Постройте схематически график функции:

1) $y = \log_{3,5} x$; 2) $y = \log_{0,1} x$

4 вариант

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = \left(\dfrac{34}{78}\right)^x$; 2) $y = 1000^x$

2. Сравните числа:

1) 96^{-78} и 96^{-67}; 2) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{2,3}$ и $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{5,3}$

3.Постройте схематически график функции:

1) $y = \log_{\frac{1}{7}} x$; 2) $y = \log_{17} x$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4-5 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №8: Тренажеры по теме: Показательные уравнения

Цель: отработка навыков решения упражнений на решениепоказательных уравнений.

Форма организации студентов на занятии: индивидуальная.

Методические указания.

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, то есть уравнений в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения

$a^x = a^c, \qquad x = c$, где $a \neq 1, a > 0$.

Пример №1. $4 \cdot 2^x = 1$

$2^2 \cdot 2^x = 2^0$

$2^{2+x} = 2^0$

$2 + x = 0$

$X = -2$

Ответ: $x = -2$.

Пример №2 $3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$x = 4$

Ответ: $x = 4$.

Пример №3

$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$

$3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 25$

$3^x \cdot \left(3 - \frac{2}{9}\right) = 25$

$3^x \cdot \frac{25}{9} = 25$

$3^x = 9$

Ответ: $x = 2$.

Пример №4.

$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$

Пусть $3^x = y$, тогда

$y^2 - 4y - 45 = 0$

$y_1 = 9 \qquad y_2 = -5$

$3^x = 9 \qquad 3^x = -5$-нет корней

Ответ: $x = 2$.

1 вариант

1) $5^{2x+1}=25$;

2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2-14x} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-45}$

3) $7^{x+1}-7^x=42$

4) $3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0$

2 вариант

1) $4^{5x-6} = 16$

2) $0{,}5^{x^2-7x+10} = 1$

3) $2^{x+2} + 2^{x} + 2^{x+1} = 28$

4) $5^{2x} - 6 \cdot 5^{x} + 5 = 0$

3 вариант

1) $4 \cdot 12^{2x+3} = 48$

2) $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^{x} = 63$

3) $\left(\frac{7}{8}\right)^{2x^2-4x} = 1$

4) $4^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$

4 вариант

1) $10^{4x+2} = 1000$

2) $5^{3x+2} + 3 \cdot 5^{3x} = 140$

3) $0{,}7^{4x^3+24x^2} = 1$

4) $8^{2x} - 10 \cdot 8^{x} + 16 = 0$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №9: Тренажеры по теме: Логарифмические уравнения

Цель: отработка навыков решения упражнений на решение логарифмических уравнений .
Форма организации студентов на занятии: фронтальная.
Методические указания.
С помощью тождественных преобразований, в которых применяются свойства логарифмической функции:

XIX. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

XX. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

XXI. $\log_a x^k = k \log_a x$

XXII. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$

XXIII. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

XXIV. $a^{\log_a b} = b$

Логарифмическое уравнение сводится к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *затем логарифм отбрасывается и уравнение принимает вид* $f(x) = g(x)$.

Пример №1.

$\log_3 x + \log_3(3x - 2) = \log_3 5$ О.Д.З. $\begin{cases} x > 0 \\ 3x - 2 > 0 \end{cases}$

$\log_3 x(3x - 2) = \log_3 5$ по свойству *II* $\begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$

$x(3x - 2) = 5$ $x > \frac{2}{3}$

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 8}{6}$ $x_1 = \frac{5}{3} > \frac{2}{3}$ *Ответ :* $x = \frac{5}{3}$

$x_2 = -1$ не удовлетворяет О.Д.З.

1 вариант

1. Решите уравнение:

1) $\log_3(2x - 1) = 2$;

2) $\log_{\frac{1}{4}}(2x - 3) = -1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 5) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) = -3$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \log_2 x = \log_2 3 + \log_2 y; \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

2 Вариант

1. Решите уравнение:

1) $\log_5(3x - 1) = 2$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(2 + 5x) = -3$;

3) $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) = 0$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 7; \\ \log_3 x + \log_3 y = -5 \end{cases}$

3 вариант

1) $\log_2(7 - 4x) = 3$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) = -1$;

3) $\log_8(x - 2) + \log_8(x - 4) = 1$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

4 вариант

1. Решите уравнение:

1) $\log_2(4-5x)=3$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-3)=-2$;

3) $\lg(2x+1)+\lg(x+3)=\lg 3$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=1\\ x+y=6\end{cases}$

Критерии оценивания:

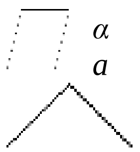
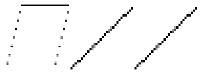
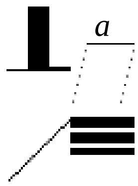
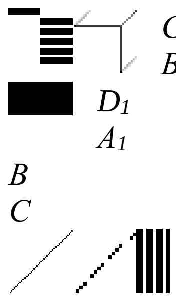
Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №10: Тренажеры по теме: Взаимное расположение прямых и плоскостей

Аксиомы, выражающие основные свойства плоскостей в пространстве.
Аксиома 1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
Аксиома 2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.
Аксиома 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (т.е. плоскости имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей).
Следствием этих аксиом являются следующие теоремы (доказательства этих теорем и всех последующих опускаем):
Теорема 1. Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.
Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.
Теорема 3. Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

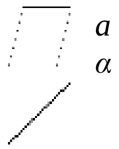
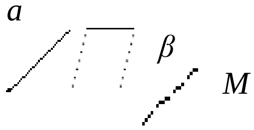
II. ***Взаимное расположение прямых.***

Возможны три случая: две прямые параллельны, пересекаются или скрещиваются.

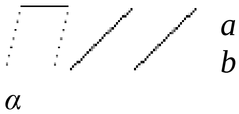
Определение. Две прямые называются ***пересекающимися***, если они имеют одну общую точку. Обозначение: $a \cap b = M$	
Определение. Две прямые называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Обозначение: $a \parallel b$	
Определение. Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются ***скрещивающимися***. Обозначение: $a \dot{-} b$	
Теорема 4 (***признак скрещивающихся прямых***): Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.	$\left.\begin{matrix} b \subset \alpha \\ a \cap \alpha = M \\ M \notin b \end{matrix}\right\vert \Rightarrow a \dot{-} b$
Пример: Две прямые, содержащие ребра AA_1 и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются скрещивающимися.	

III. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Возможны три случая: прямая лежит в плоскости; прямая пересекает плоскость; прямая и плоскость параллельны.

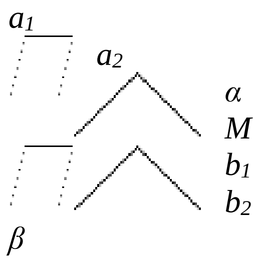
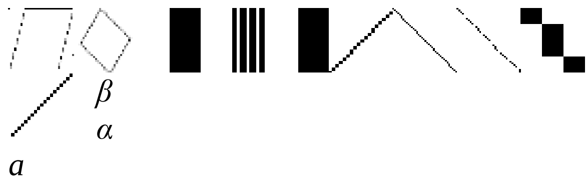
Определение. Прямая, все точки которой принадлежат плоскости, называется прямой, ***лежащей в плоскости***. Обозначение: $a \subset \alpha$	
Определение. Прямая и плоскость называются ***пересекающимися***, если у них есть одна общая точка. Обозначение: $a \cap \beta = M$	

Определение. Прямая и плоскость называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек.
Обозначение: $a \parallel \beta \Leftrightarrow a \cap \beta = \varnothing$

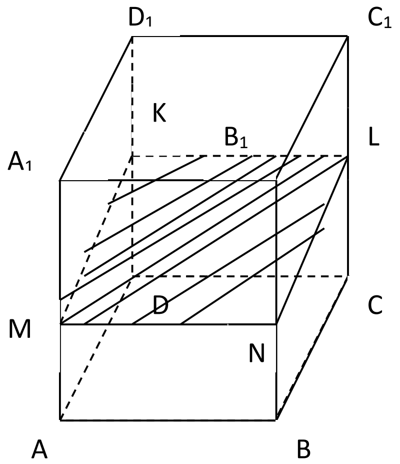
Теорема 5 (***признак параллельности прямой и плоскости***): Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна данной плоскости. $\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array}\right\| \Rightarrow a \parallel \alpha$	

IV. *Взаимное расположение плоскостей.*

Возможны два случая: две плоскости пересекаются или параллельны.
Определение. Две плоскости называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек

Теорема 6 (***признак параллельности плоскостей***): Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны. $\left.\begin{array}{r} a_1 \subset \alpha \\ a_2 \subset \alpha \\ a_1 \cap a_2 = M \\ b_1 \subset \beta \\ b_2 \subset \beta \\ a_1 \parallel b_1 \\ a_2 \parallel b_2 \end{array}\right\| \Rightarrow \alpha \parallel \beta$	
Определение. Две плоскости называются ***пересекающимися***, если они имеют общую прямую. В этом случае они не имеют других общих точек вне этой прямой. $\alpha \cap \beta = a$	

1 вариант



MN||AB, NL||BC

По рисунку:

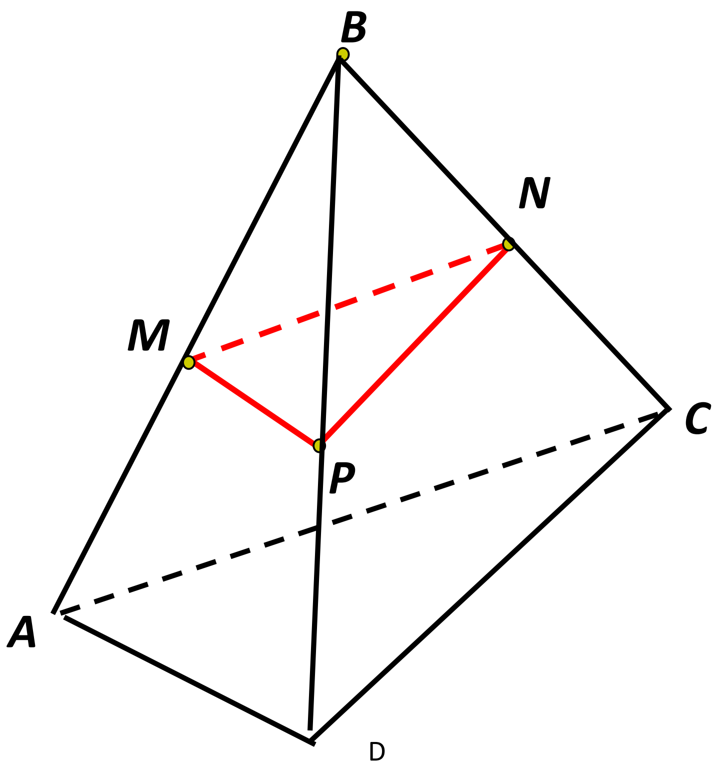
1) назовите плоскости, в которых лежат прямые MN, KL, AD.
2) назовите прямые, по которым пересекаются плоскости (ABC) и (BCC_1), (AA_1D) и (MNL).
3) Докажите, что плоскости (MNL) || (ABC).
4) Из точки А к плоскости α проведены перпендикуляр АН и наклонная АМ, АН = 5 см, АМ = 13 см. Найдите МН.

2 вариант

MP||AD, PN||BC

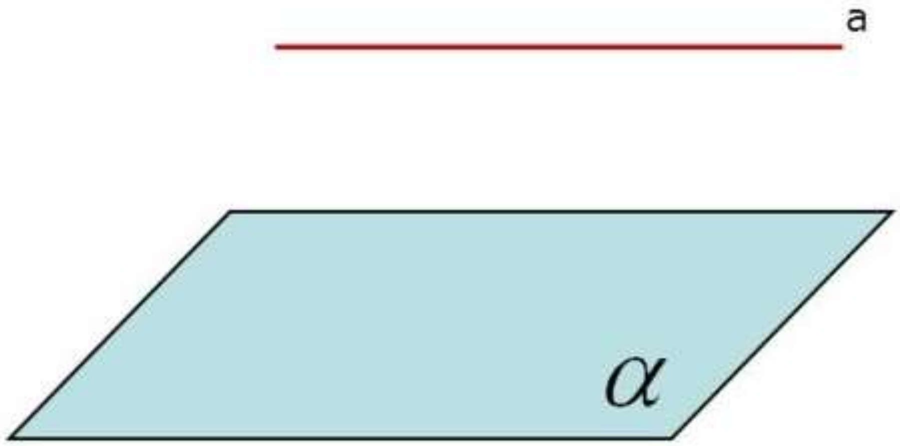
По рисунку:

1) Назовите плоскости, в которых лежат прямые MP, AAD, MN.
2) Назовите прямые по которым пересекаются плоскости (MNP) и (ABC), (ADC) и (ABC).
3) Докажите, что плоскости (MNP) ||(ADC).
4) Из точки А к плоскости α проведены перпендикуляр АН и наклонная АМ, МН = 5 см, АМ = 13 см. Найдите АН.

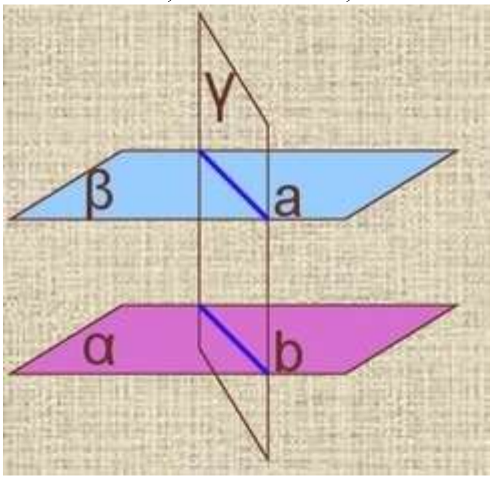


Практическая работа №11: Тренажеры по теме: Параллельность прямых и плоскостей

Прямая и плоскость являются параллельными, если они не имеют общих точек.



Действительно, прямая и плоскость могут иметь всего 3 взаимных расположения:
а. Прямая на плоскости
б. Прямая пересекает плоскость в одной точке
в. Прямая не пересекает плоскость.
Это возможно, только если они не пересекаются вообще - параллельны. Посмотрите для примера на линию pолoлка и пол. Обозначение: а || α.
Отсюда можно вывести полезную теорему:
Прямая не лежит на плоскости, но параллельна одной прямой в этой плоскости. Значит, прямая параллельна всей плоскости.
И пара утверждений из теоремы, которые могут пригодиться в задачах:
1. Прямая параллельна одной плоскости. Если проведем новую плоскость через эту прямую и плоскость, то окажется, что линия пересечения двух плоскостей параллельна прямой.



2. Есть две параллельных прямых. Если одна из них параллельна плоскости, то другая прямая либо тоже параллельна плоскости, либо лежит на ней.

Вариант 1

1. К плоскости проведены две равные наклонные. Равны ли их проекции?

2. Какое из следующих утверждений верно?

а) Две прямые перпендикулярные третьей перпендикулярны между собой;

б) прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна хотя бы одной прямой, лежащей в этой плоскости;

в) две прямые, перпендикулярные к плоскости, перпендикулярны между собой;

г) прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

3. Прямая m перпендикулярна к прямым a и b, лежащим в плоскости α, но m не перпендикулярна к плоскости α. Выясните взаимное расположение прямых a и b.

а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются; г) определить нельзя.

4. Прямая a перпендикулярна к прямым c и b, лежащим в плоскости α, прямая a перпендикулярна к плоскости α. Выясните взаимное расположение прямых c и b.

а) только параллельны; б) только пересекаются; в) параллельны или пересекаются; г) определить нельзя.

5. В треугольнике АВС , АН – высота треугольника. Вне плоскости АВС выбрана точка Д, причем ДВ $\perp$ ВС, ДВ $\perp$ АВ . Плоскости ДВС перпендикулярна прямая

а) АД; б) АВ; в) АН; г) АС.

6. Прямая a, параллельная прямой b, пересекает плоскость α. Прямая c параллельна прямой b, тогда:

а) прямые a и c пересекаются; б) прямая c лежит в плоскости α;

в) прямые a иc скрещиваются; г) прямые a и c параллельны.

7. Каким может быть взаимное расположение прямых a и b, если через прямую a можно провести плоскость, параллельную прямой b?

а) скрещиваются или пересекаются;

б) скрещиваются или параллельны;

в) только скрещиваются;

г) только параллельны.

8. Прямые a и $в$ лежат в параллельных плоскостях, следовательно эти прямые

а) скрещиваются или пересекаются; б) скрещиваются или параллельны; в) только скрещиваются; г) только параллельны.

9. Каким может быть взаимное расположение двух прямых, если обе они параллельны одной плоскости?

а) только параллельны; б) все случаи взаимного расположения;

в) только скрещиваются; г) только пересекаются.

10. Прямая a параллельна плоскости α. Какое из следующих утверждений верно?

а) Прямая *а* параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;

б) прямая *а* не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости *α*;

в) прямая *а* скрещивается со всеми прямыми плоскости *α;*

г) прямая *а* имеет общую точку с плоскостью.

Вариант 2

1. Какое из следующих утверждений неверно?

а) Если прямая перпендикулярна к двум прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости;

б) если прямая перпендикулярна к плоскости, то она ее пересекает;

в) если две плоскости перпендикулярны к прямой, то они параллельны;

г) если две прямые перпендикулярны к плоскости ,то они параллельны.

2. Две наклонные, проведенные к плоскости, имеют равные проекции. Их наклонные равны?

а) нет

б) да

3. Если одна из двух скрещивающихся прямых перпендикулярна к плоскости, то будет ли перпендикулярна к этой плоскости вторая прямая?

а) Да; б) да, но при определенных условиях; в) определить нельзя; г) нет.

4. Точка Е не принадлежит плоскости прямоугольника *ABCD*. $BE \perp AB$, $BE \perp BC$. Тогда прямая *CD* и плоскость *BCE:*

а) параллельны; б) перпендикулярны; в) определить их взаимное расположение нельзя ; г) прямая лежит в плоскости.

5. АВСД – квадрат. Вне его плоскости выбрана точка К, причем КА ⊥ АВ. Плоскости АКД перпендикулярна прямая

а) ДС; б) КС; в) ВК; г) ВС.

6. Прямая *с*, параллельная прямой *а*, пересекает плоскость *β.* Прямая *b* параллельна прямой *а*, тогда:

а) прямые *b* и *с* пересекаются; б) прямая *b* лежит в плоскости *β*;

в) прямые *b* и *с* скрещиваются; г) прямые *b* и *с* параллельны.

7. Каким может быть взаимное расположение прямых *а* и *b,* если любая плоскость, проходящая через *а*, не параллельна *b*?

а) скрещиваются; б) параллельны; в) пересекаются; г) определить нельзя.

8. Прямые *а* и *в* лежат в параллельных плоскостях, следовательно эти прямые

а) скрещиваются или пересекаются; б) скрещиваются или параллельны;

в) только скрещиваются; г) только параллельны.

9. Прямая *a* параллельна плоскости *α*. Какое из следующих утверждений верно?

а) Прямая *a* параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;

б) прямая *a* не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости *α*;

в) прямая *a* скрещивается со всеми прямыми плоскости *α;*

г) прямая *a* имеет общую точку с плоскостью .

10. Каким может быть взаимное расположение прямых *a* и *b*, если прямая *a* лежит в плоскости *α*, а прямая *b* параллельна этой плоскости?

а) Параллельны или пересекаются;

б) скрещиваются или пересекаются;

в) параллельны или скрещиваются;

г) определить нельзя.

Критерии оценивания работы:

1. Отметка "5" выставляется, если правильно выполнено 8-9 заданий
2. Отметка "4" выставляется, если правильно выполнено 6-7 заданий
3. Отметка "3" выставляется, если правильно выполнено 5 заданий
4. Отметка "2" выставляется, если правильно выполнено менее 5 заданий

Ключи к правильным ответам:

№ п/п вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	а	г	а	б	б	г	в	в	б	б
2	а	б	г	б	а	г	а	в	б	в

Практическая работа №12: Тренажеры по теме: Углы между прямыми и плоскостями

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (угол φ на рис. 1).

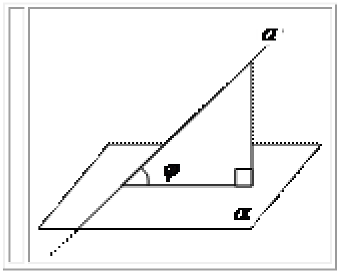
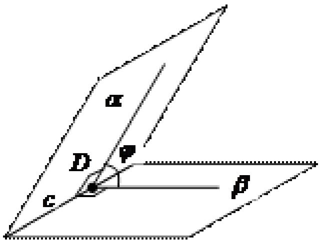


Рис. 1

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными соответственно данным скрещивающимся прямым.

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей прямой. Полуплоскости называются ***гранями***, прямая – ***ребром*** двугранного угла.



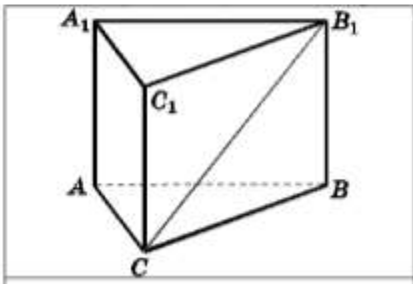
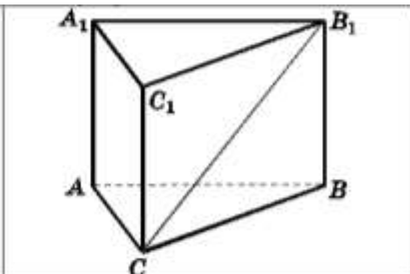
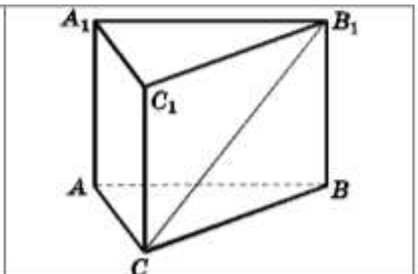
Линейным углом двугранного угла называется угол между полупрямыми, принадлежащими граням двугранного угла, исходящими из одной точки на ребре и перпендикулярными ребру (угол φ на рис. 2).

Рис. 2

Градусная (радианная) мера двугранного угла равна градусной (радианной) мере его линейного угла.

1 вариант

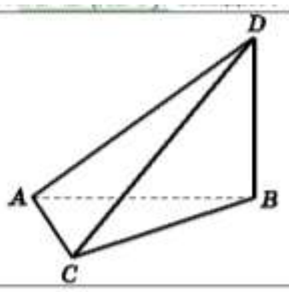
1. $AA_1 \perp (ABC)$. Найдите угол между прямой CB_1 и плоскостью AA_1C_1

		
$\Delta\, ABC$– равносторонний	$\Delta\, ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90°$	$\Delta\, ABC$ – тупоугольный, $\angle C > 90°$

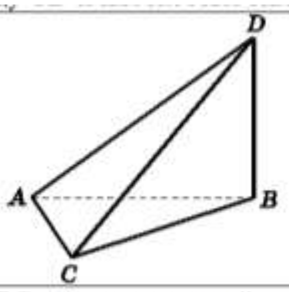
2. Через вершину *B* ромба *ABCD* проведена прямая *BM,* перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки *M* до прямых, содержащих стороны ромба, если *AB*=25 см, $\angle BAD = 60^0$, *BM*=12,5 см.

2 вариант

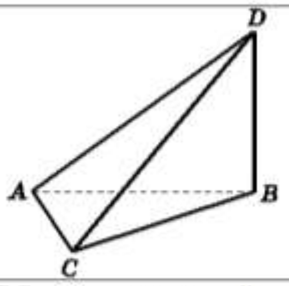
1. $BD \perp (ABC)$. Найдите угол между *CD* и плоскостью *ABD.*



$\Delta\, ABC$ – равносторонний



$\Delta\, ABC$ – прямоугольный, $\angle A = 90°$



$\Delta\, ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90°$

2. Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если AC=4 см, а $CM=2\sqrt{7}$ см.

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №13: Тренажеры по теме: Комбинаторные конструкции

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются перестановки, размещения и сочетания. При этом необходимо учитывать, есть ли среди рассматриваемых элементов повторяющиеся.

Определение**.** ***Перестановкой из n элементов*** называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке.

Если среди элементов нет одинаковых, то ***число перестановок*** из n элементов обозначают символом P_n («пэ из эн») и вычисляют по формуле:

$\mathbf{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (\boldsymbol{n} - 2) \cdot (\boldsymbol{n} - 1) \cdot \boldsymbol{n}}$.

Для произведения первых n натуральных чисел есть специальное обозначение ***n!*** («эн факториал»). При этом 0! принимается за единицу, то есть 0! = 1.

Пример 1. 5! = 1×2×3×4×5 = 120.

Пример 2. Сколькими способами можно расставить 6 бегунов и 6 беговых дорожках?

Число способов, очевидно, равно числу перестановок из 6 элементов:

$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Если среди n элементов есть повторяющиеся, то число перестановок из n элементов обозначают символом P_n (n_1, n_2, …, n_s) (***перестановки с повторениями***) и вычисляют по формуле:

$$P_n(n_1; n_2; \ldots; n_s) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_s!}$$

Здесь n_1, n_2, …, n_s – количество одинаковых элементов по группам.

<u>Определение</u>. ***Размещением из n элементов по k*** (k £ n) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определённом порядке из данных n элементов.

Если один и тот же элемент нельзя брать более одного раза, то ***число размещений*** из n элементов по k обозначают A_n^k («а из эн по ка») и вычисляют по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1).$$

Заметим, что $A_n^n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - (n - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_n$.

<u>Пример</u>. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нём было 4 различных предмета?

Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо самыми предметами, либо порядком их следования, то есть важен и порядок, и сами элементы, - это размещения: $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Если один и тот же элемент можно использовать более одного раза, то число размещений из n элементов по k обозначают $\bar{A}_s^k$ (***размещение с повторениями***) и вычисляют по формуле: $\bar{A}_s^k = s^k$. Здесь s – количество различных элементов среди nэлементов.

<u>Определение</u>. ***Сочетанием из n элементов по k*** называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов. Здесь не важен порядок следования элементов, в отличие от размещений и перестановок.

Если среди данных n элементов нет одинаковых, то ***число сочетаний*** из n элементов по k обозначают C_n^k («цэ из эн по ка») и вычисляют по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Заметим, что ***связь между сочетаниями, размещениями и перестановками*** выражается формулой

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} \quad \text{или} \quad A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

<u>Пример</u>. Из 12 членов группы надо выбрать трёх для поездки в магазин. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, что здесь важны только сами элементы (конкретные люди), следовательно, это сочетания: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\cdot(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$.

Если среди n элементов есть повторяющиеся, то число сочетаний обозначают $\overline{C}_s^k$ (***сочетания с повторениями***) и вычисляют по формуле: $\overline{C}_s^k = C_{s+k-1}^k$. Здесь s – количество различных элементов среди n элементов.

1 вариант

1. Вычислите:

   $а)\ \frac{P_4}{P_8}\cdot A_8^4;\quad в)\ \frac{P_{20}}{A_{20}^{15}} - \frac{A_{20}^5}{C_{20}^5};$

   $б)\ C_8^6\cdot P_{2;}\quad г)\ C_5^3C_4^2 + C_4^2C_3^1.$

2. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 6 различных уроков?
3. Сколькими способами из 7 членов президиума собрания можно выбрать председателя, его заместителя и секретаря?
4. Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестерку?
5. Решите уравнение: $A_{x+1}^2 = 20.$

2 вариант

1. Вычислите:

   $а)\ \frac{P_5}{P_9}\cdot A_9^5;\quad в)\ \frac{P_{14}}{A_{14}^{10}} - \frac{A_{14}^4}{C_{14}^4};$

   $б)\ C_{10}^7\cdot P_3;\quad г)\ C_6^4C_5^3 - C_5^3C_4^2.$

2. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в одном числе не должны повторяться)?
3. Сколькими способами из 9 учебных предметов модно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков?
4. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?
5. Решите уравнение: $C_x^{x-1}\cdot(x-1) = 30.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №14: Тренажеры по теме: Правила комбинаторики

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух **основных правил** - правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, то выбор "либо A, либо B" можно осуществить $n+m$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта $A)\quad m$ способами, то пары объектов A и B можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пусть A = {a_1, a_2, ..., a_n}, B = {b_1, b_2, ..., b_m} и $|$ A $|$ - число элементов множества A. Составим декартово произведение $A \times B$ множеств A и B, т.е. множество пар (a_i, $b_i)$.

$$a_i \in A, b_i \in B : A \times B = \begin{array}{l} \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),...,(a_1,b_m), \\ \ (a_2,b_1),(a_2,b_2),...,(a_2,b_m), \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \ (a_n,b_1),(a_2,b_n),...,(a_n,b_m)\}. \end{array}$$

Тогда правило произведения записывается следующим образом:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Пример 6. Сколько существует двузначных чисел?

Решение. Поскольку в двузначном числе цифра, обозначающая число десятков, должна быть отлична от нуля, то A = {1, 2, ..., 9}, B = {0, 1, 2, ..., 9} и $A \times B = \{10, 11, ..., 19, ..., 90, 91, ..., 99\}, |A \times B| = |A| \cdot |B| = 90.$

Выборки элементов без повторений

Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначим A_n^m. Используя основное правило комбинаторики, получаем

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Если $m = n$, то A_n^n - число таких размещений, которые отличаются только порядком расположения элементов. Такие размещения называются **перестановками**. Их число P_n находится по формуле

$$P_n = A_n^n = n!$$

Выборки из m элементов, взятых из данных n, отличающихся только составом элементов, называются **сочетаниями** из n элементов по m. Число C_n^m таких сочетаний находится

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 7. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, немецкого, французского, испанского - на любой другой из этих пяти языков?

Решение. Поскольку важен порядок, с какого языка задается перевод на другой, то для ответа на вопрос необходимо найти число размещений из пяти по два.

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (словарей)}.$$

Пример 8. В соревнованиях на первенство университета по волейболу участвуют 8 команд. Насколько более продолжительным будет турнир, организованный по круговой системе, чем по олимпийской?

Решение. При проведении турнира по круговой системе каждый участник встречался с каждым и порядок их вхождения в пару не важен. Следовательно, по круговой системе потребуется провести $C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ встреч, а по олимпийской только - 7 (четыре встречи в $1/4$ финала, две - в полуфинале и одна в финале).

Выборки элементов с повторениями

В данных выборках допускается повторение элементов, что является достаточно естественным (например, в телефонных и автомобильных номерах возможно использование одной цифры несколько раз).

Число **размещений** из n элементов по m с повторениями обозначается $\bar{A}_n^m$ и находится как

$$\bar{A}_n^m = n^m.$$

Число **перестановок** $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$, в которых 1-й элемент повторяется m_1 раз, 2-й - m_2 раз, а k-й - m_k раз, находится следующим образом:

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)!}{m_1! m_2! \ldots m_k!}.$$

Пример 9. Сколько "слов" можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?

Решение. Заметим, что если бы все буквы были различны, то получили бы P_{10} новых "слов", но буква "М" употребляется в "слове" 2 раза, "А" - 3 раза, "Т" - 2 раза, оставшиеся три буквы - по разу. Следовательно, искомое число будет в $P_2 \cdot P_3 \cdot P_2$ раз меньше, чем P_{10}, и равно

$$P_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

Число **сочетаний** с повторениями $\bar{C}_n^m$ из n элементов по m выражается через число сочетаний без повторений:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Пример 10. В кафе в продаже имеются 5 сортов пирожных. Сколькими способами 8 студенток могут заказать себе по одному пирожному?

Решение. Зашифруем каждую покупку 8 пирожных единицами по 5 сортам, разделяя сорта нулями. Тогда каждой покупке будет соответствовать упорядоченный набор из 8 единиц и 4 (= 5 - 1) разделительных нулей, а общее число покупок будет соответствовать числу перестановок этих нулей и единиц $P_{8,4}$. Таким образом,

$$\bar{C}_5^8 = P_{8,4} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495 = C_{5+8-1}^8.$$

Вариант 1

1. Сколько различных трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр: 2, 5, 7, 8, 9?
2. Сколько различных трехзначных чисел составить из цифр: 0, 2, 5, 7, 8, 9?
3. В классе 15 девочек и 17 мальчиков. Сколько существует способов выбора одного ведущего для школьного праздника?
4. У Оли 3 куклы и 4 плюшевых медведя. Сколько способов выбора одной игрушки есть у Оли?
5. В столовой есть 3 вида первого блюда, 5 видов второго блюда и 3 вида компота. Сколько существует вариантов обеда для студента, если обычно он покупает первое, второе и компот?
6. Сколькими способами могут занять очередь в кассу 5 человек?
7. На клумбе расцвели 15 красных, 10 белых, 12 розовых роз. Сколько существует способов составить букет из трех роз разного цвета?
8. В классе 20 учащихся. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя старосты в этом классе?
9. Из 25 членов туристической группы 10 человек владеют английским языком, 8-немецким, а остальные- французским. Сколько существует способов выбора делегации из трех туристов так , чтобы они владели тремя языками?
10. Сколько существует нечетных трехзначных чисел, составленных из цифр 5, 6, 7, 9?

Вариант 2

1. Сколько различных трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр: 1, 2, 3, 4, 5?
2. Сколько различных трехзначных чисел составить из цифр: 0, 1, 3, 5, 7, 9?
3. В классе 12 девочек и 5 мальчиков. Сколько существует способов выбора пары ведущих (разнополой) для школьного праздника?

4. У Юли 7 пупсиков и 5 плюшевых медведя. Сколько способов выбора одной игрушки есть у Юли?
5. В столовой есть 4 вида первого блюда, 6 видов второго блюда и 2 вида компота. Сколько существует вариантов обеда для студента, если обычно он покупает первое, второе и компот?
6. Сколькими способами могут занять очередь в кассу 6 человек?
7. На клумбе расцвели 8 красных, 10 белых, 14 розовых роз. Сколько существует способов составить букет из трех роз разного цвета?
8. В классе 25 учащихся. Сколькими способами можно выбрать старосту и физорга в этом классе?
9. Из 20 членов туристической группы 15 человек владеют английским языком, 3 — немецким, а остальные- французским. Сколько существует способов выбора делегации из трех туристов так , чтобы они владели тремя языками?
10. Сколько существует четных трехзначных чисел, составленных из цифр 4, 6, 7, 9, 0?

Вариант 3

1. Сколько различных двухзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр: 2, 5, 7, 8, 9?
2. Сколько различных трехзначных чисел составить из цифр: 0, 1, 2, 5, 7, 8, 9?
3. В классе 11 девочек и 17 мальчиков. Сколько существует способов выбора одного ведущего для школьного праздника?
4. У Оли 22 куклы и 4 плюшевых медведя. Сколько способов выбора одной игрушки есть у Оли?
5. В столовой есть 5 видов первого блюда, 5 видов второго блюда и 2 вида компота. Сколько существует вариантов обеда для студента, если обычно он покупает первое, второе и компот?
6. Сколькими способами могут занять очередь в кассу 4 человека?
7. На клумбе расцвели 11 красных, 8 белых, 15 розовых роз. Сколько существует способов составить букет из трех роз разного цвета?
8. В классе 18 учащихся. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя старосты в этом классе?
9. Из 30 членов туристической группы 10 человек владеют английским языком, 12 — немецким, а остальные- французским. Сколько существует способов выбора делегации из трех туристов так , чтобы они владели тремя языками?
10. Сколько существует нечетных трехзначных чисел, составленных из цифр 2, 5, 6, 8, 9?

Вариант 4

1. Сколько различных двухзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр: 1, 2, 3, 4, 5?
2. Сколько различных трехзначных чисел составить из цифр: 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9?
3. В классе 15 девочек и 5 мальчиков. Сколько существует способов выбора пары ведущих (разнополой) для школьного праздника?
4. У Юли 9 пупсиков и 8 плюшевых медведя. Сколько способов выбора одной игрушки есть у Юли?
5. В столовой есть 2 вида первого блюда, 7 видов второго блюда и 3 вида компота. Сколько существует вариантов обеда для студента, если обычно он покупает первое, второе и компот?
6. Сколькими способами могут занять очередь в кассу 7 человек?

7. На клумбе расцвели 18 красных, 6 белых, 8 розовых роз. Сколько существует способов составить букет из трех роз разного цвета?
8. В классе 24 учащихся. Сколькими способами можно выбрать старосту и физорга в этом классе?
9. Из 20 членов туристической группы 5 человек владеют английским языком, 3 — немецким, а остальные- французским. Сколько существует способов выбора делегации из трех туристов так , чтобы они владели тремя языками?
10. Сколько существует четных трехзначных чисел, составленных из цифр 4, 6, 8, 9, 0?

Ответы:				
№ п/п	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1.	60	60	20	25
2.	180	180	294	294
3.	32	60	28	75
4.	7	12	26	17
5.	45	48	50	42
6.	120	720	24	840
7.	1800	1120	1320	864
8.	380	600	306	552
9.	560	90	960	180
10.	32	60	25	80

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Правильно выполнены любые 9-10 заданий
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 7-8 заданий
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 5-6 заданий
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 5 заданий

Практическая работа №15: Тренажеры по теме: Число орбит

Правило произведения: пусть из некоторого конечного множества

1-й объект можно выбрать k_1 способами,

2-ой объект – k_2 способами,

n-ый объект - k_n способами. (1.1)

Тогда произвольный набор, перечисленных n объектов из данного множества можно выбрать $k_1, k_2, \ldots, k_n$ способами.

Пример 1. Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решение. В десятичной системе исчисления десять цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. На первом месте может стоять любая из девяти цифр (кроме нуля). На втором месте -

любая из оставшихся 9 цифр, кроме выбранной. На последнем месте любая из оставшихся 8 цифр.

По правилу произведения $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ трёхзначных чисел имеют разные цифры.

Пример 2. Из пункта A в пункт B ведут 3 дороги, а из пункта B в пункт C – 4 дороги. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B ?

Решение. В пункте A есть 3 способа выбора дороги в пункт B , а в пункте B есть 4 способа попасть в пункт C . Согласно принципу умножения, существует $3 \times 4 = 12$ способов попасть из пункта A в пункт C .

Правило суммы: при выполнении условий (1.1), любой из объектов можно выбрать $k_1+k_2+\ldots+k_n$ способами.

Пример 3. Сколько существует способов выбора одного карандаша из коробки, содержащей 5 красных, 7 синих, 3 зеленых карандаша.
Решение. Один карандаш, по правилу суммы, можно выбрать $5+7+3 = 15$ способами.

Пример 4. Пусть из города A в город B можно добраться одним авиамаршрутом, двумя железнодорожными маршрутами и тремя автобусными маршрутами. Сколькими способами можно добраться из города A в город B ?

Решение. Все условия принципа сложения здесь выполнены, поэтому, в соответствии с этим принципом, получим $1+2+3 = 6$ способов.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий различие принципов умножения и сложения.

Пример 5. В магазине электроники продаются три марки телевизоров и два вида видеомагнитофонов. У покупателя есть возможности приобрести либо телевизор, либо видеомагнитофон. Сколькими способами он может совершить одну покупку? Сколько различных комплектов, содержащих телевизор и магнитофон, можно приобрести в этом магазине, если покупатель собирается приобрести в паре и телевизор, и видеомагнитофон?

Решение. Один телевизор можно выбрать тремя способами, а магнитофон – другими двумя способами. Тогда телевизор или магнитофон можно купить $3+2=5$ способами.

Во втором случае один телевизор можно выбрать тремя способами, после этого видеомагнитофон можно выбрать двумя способами. Следовательно, в силу принципа умножения, купить телевизор и видеомагнитофон можно $3 \times 2 = 6$ способами.

Рассмотрим теперь примеры, в которых применяются оба правила комбинаторики: и принцип умножения, и принцип сложения.

Пример 6. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает либо яблоко, либо апельсин. После чего Надя выбирает из оставшихся фруктов и яблоко и апельсин. Сколько возможно таких выборов?

Решение. Ваня может выбрать яблоко 12 способами, апельсин – 10 способами. Если Ваня выбирает яблоко, то Надя может выбрать яблоко 11 способами, а апельсин – 10 способами. Если Ваня выбирает апельсин, то Надя может выбрать яблоко 12 способами, а апельсин – 9 способами. Таким образом, Ваня и Надя могут сделать свой выбор $12\cdot 11\cdot 10+10\cdot 12\cdot 9=2400$ способами.

Пример 7. Есть 3 письма, каждое из которых можно послать по 6 адресам. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. **В данной задаче мы должны рассмотреть три случая:**

а) все письма рассылаются по разным адресам;

б) все письма посылаются по одному адресу;

в) только два письма посылаются по одному адресу.

Если все письма рассылаются по разным адресам, то число таких способов легко находится из принципа умножения: $n_1 = 6\times5\times4 = 120$ способов. Если все письма посылаются по одному адресу, то таких способов будет $n_2 = 6$. Таким образом, остается рассмотреть только третий случай, когда только 2 письма посылаются по одному адресу. Выбрать какое-либо письмо мы можем 3 способами, и послать его по какому-либо выбранному адресу можем 6 способами. Оставшиеся два письма мы можем послать по оставшимся адресам 5 способами. Следовательно, послать только два письма по одному адресу мы можем $n_3=3\times6\times5=90$ способами. Таким образом, разослать 3 письма по 6 адресам в соответствие с принципом сложения можно

$n_1+n_2+n_3=120+6+90=216$ способами.

Обычно в комбинаторике рассматривается идеализированный эксперимент по выбору наудачу k элементов из n. При этом элементы: а) не возвращаются обратно (схема выбора без возвращений); б) возвращаются обратно (схема выбора с возвращением).

1 вариант

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?

1) 30 2) 100 3) 120 4) 5

2. В 9«Б» классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

1) 128 2) 35960 3) 36 4)46788

3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

1) 10 2) 60 3) 20 4) 30

4. Вычислить: 6! -5!

1) 600 2) 300 3) 1 4) 1000

5. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?

1) $\frac{17}{45}$ 2) $\frac{17}{43}$ 3) $\frac{43}{45}$ 4) $\frac{17}{45}$

6. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?

1) $\frac{3}{2}$ 2) 0,5 3) 0,125 4) $\frac{1}{3}$

7. В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?

1) 0,02 2) 0,00012 3) 0,0008 4) 0,002

2 вариант

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

1) 100 2) 30 3) 5 4) 120

2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?

1) 3 2) 6 3) 2 4) 1

3. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков.

1) 10000 2) 60480 3) 56 4) 39450

4. Вычислите: $\frac{8!}{6!}$

1) 2 2) 56 3) 30 4) $\frac{4}{3}$

5. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?

1) $\frac{1}{36}$ 2) $\frac{1}{35}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{36}{4}$

6. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

1) 0,25 2) $\frac{2}{6}$ 3) 0,5 4) 0,125

7. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?

1) 0,5 2) 0,4 3) 0,04 4) 0,8

3 вариант

1. Сколькими способами можно расставить 4 различные книги на книжной полке?

1) 24 2) 4 3) 16 4) 20

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

1) 30 2) 21 3) 14 4) 7

3. В футбольной команде 11 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

1) 22 2) 11 3) 150 4) 110

4. Сократите дробь: $\frac{n!}{(n+1)!}$

1) 1 2) $\frac{n}{n+1}$ 3) $\frac{1}{n+1}$ 4) $\frac{2}{n+1}$

5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

1) $\frac{1}{6}$ 2) 0,5 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0,25

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

1) 0,25 2) 0, 4 3) 0,48 4) 0,2

7. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

1) 0,8 2) 0,1 3) 0,015 4) 0,35

4 вариант

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 5 человек?

1) 5 2) 120 3) 25 4) 100

2. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

1) 12650 2) 100 3) 75 4)10000

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры. Которых нечетные и различные.

1) 120 2) 30 3) 50 4) 60

4. Упростите выражение: $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

1) 0,5 2) $\frac{n+1}{n-2}$ 3) $n^3 - n$ 4) n^2 -1

5. Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

1) $\frac{7}{30}$ 2) $\frac{7}{12}$ 3) $\frac{7}{31}$ 4) $\frac{7}{365}$

6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

1) 0,504 2) 0,006 3) 0,5 4) 0,3

7. Из 30 учеников спорткласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

1) $\frac{17}{30}$ 2) 0,5 3) $\frac{28}{30}$ 4) $\frac{14}{30}$

Ключи:

Вариант 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	2	4	1	2	3	4

Вариант 2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	4	1	2	2	3	1	1

Вариант 3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

Вариант 4

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	1	4	3	2	1	1

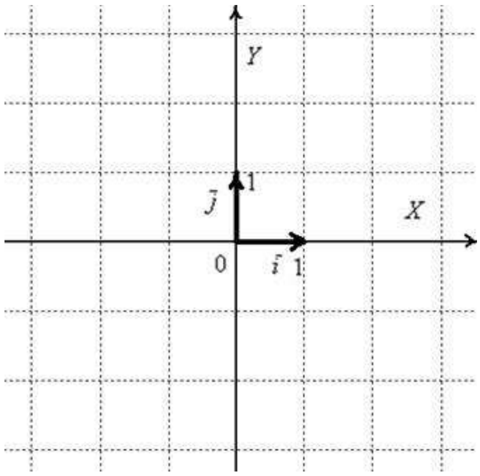
Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 5-6 заданий
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 4 заданий

Практическая работа №16: Тренажеры по теме: Координаты и векторы и плоскости

Координаты вектора на плоскости

Первым пунктом рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$:

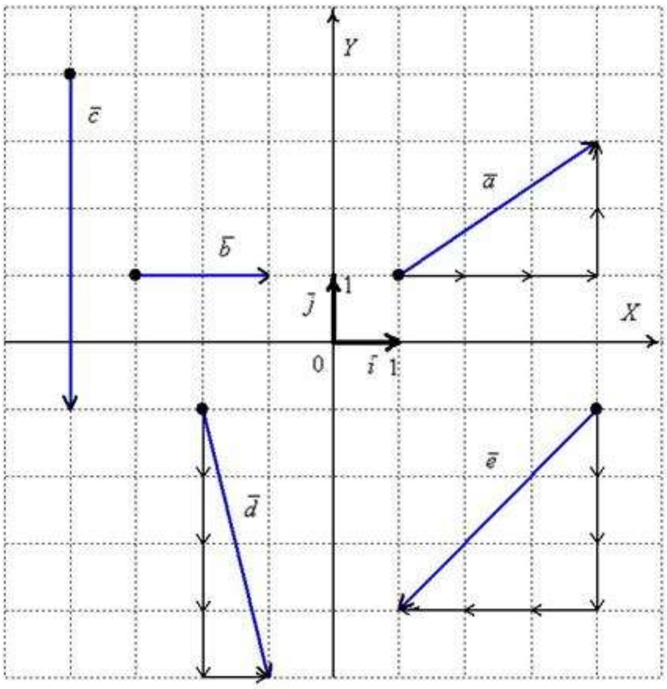


Векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ **ортогональны**. Ортогональны = Перпендикулярны. Вместо параллельности и перпендикулярности используем соответственно слова *коллинеарность* и *ортогональность*.

Обозначение: ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: $\bar{i} \perp \bar{j}$.

Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости. Простыми словами, базис и начало координат задают всю систему – это своеобразный фундамент, на котором кипит полная и насыщенная геометрическая жизнь.

Любой вектор $\bar{v}$ плоскости **единственным образом** выражается в виде: $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$, где v_1, v_2 – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$ называется **разложением вектора** $\bar{v}$ **по базису** $(\bar{i}; \bar{j})$.



Простейшие задачи аналитической геометрии.
Действия с векторами в координатах

Задания, которые будут рассмотрены, крайне желательно научиться решать на полном автомате, а формулы запомнить наизусть. Это весьма важно, поскольку на простейших элементарных примерах базируются другие задачи аналитической геометрии.

Как найти вектор по двум точкам?

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

То есть, из координат конца вектора нужно вычесть соответствующие координаты начала вектора.

<u>Пример 1</u>

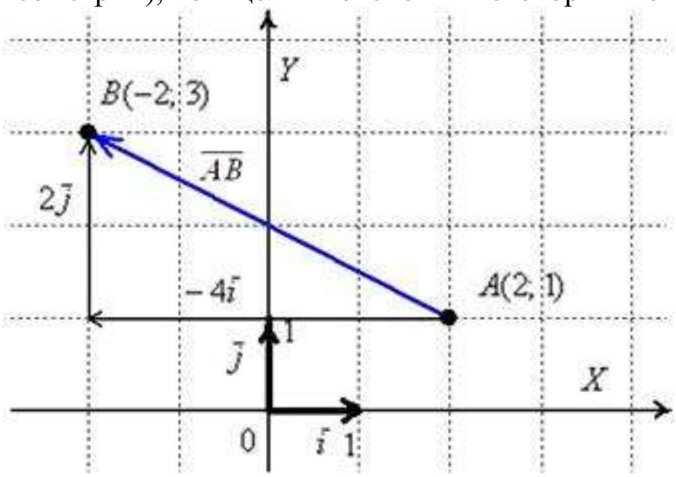
Даны две точки плоскости $A(2; 1)$ и $B(-2; 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

Решение: по соответствующей формуле:

$\overline{AB}(-2-2; 3-1) = \overline{AB}(-4; 2)$

Ответ: $\overline{AB}(-4; 2)$

По условию не требовалось строить чертежа (что характерно для задач аналитической геометрии), но в целях пояснения некоторых моментов



Обязательно нужно понимать различие между координатами точек и координатами векторов:

Координаты точек – это обычные координаты в прямоугольной системе координат. Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

Координаты же вектора – это его разложение по базису $(\bar{i}; \bar{j})$, в данном случае $\overline{AB} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$. Любой вектор является свободным, поэтому при необходимости мы легко можем отложить его от какой-нибудь другой точки плоскости. Интересно, что для векторов можно вообще не строить оси, прямоугольную систему координат, нужен лишь базис.

Записи координат точек и координат векторов вроде бы схожи: $A(2; 1)$, $B(-2; 3)$, $\overline{AB}(-4; 2)$, а смысл координат абсолютно разный, и вам следует хорошо понимать эту разницу.

<u>Пример 2</u>

а) Даны точки $A(-4; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

б) Даны точки $A(2; 0)$, $B(-7; 1)$ и $C(4; 1)$. Найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

Что важно при решении задач аналитической геометрии? Важно быть ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫМ, чтобы не допустить мастерскую ошибку «два плюс два равно нулю».

Как найти длину отрезка?

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Примечание: *Формулы останутся корректными, если переставить местами соответствующие координаты:* $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ *, но более стандартен первый вариант*

Пример 3

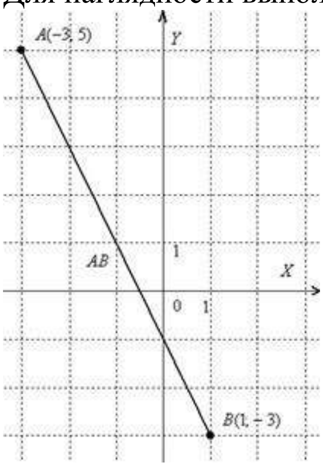
Даны точки $A(-3;\,5)$ и $B(1;\,-3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:

$$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Для наглядности выполню чертёж



Отрезок AB – это не вектор, и перемещать его куда-либо, конечно, нельзя. Кроме того, если вы выполните чертеж в масштабе: 1 ед. = 1 см (две тетрадные клетки), то полученный ответ $|AB| \approx 8{,}94$ ед. можно проверить обычной линейкой, непосредственно измерив длину отрезка.

Да, решение короткое, но в нём есть ещё пара важных моментов, которые хотелось бы пояснить:

Во-первых, в ответе ставим размерность: «единицы». В условии не сказано, ЧТО это, миллиметры, сантиметры, метры или километры. Поэтому математически грамотным решением будет общая формулировка: «единицы» – сокращенно «ед.».

Как найти длину вектора?

Если дан вектор плоскости $\bar{v}(v_1;\,v_2)$, то его длина вычисляется по формуле $\bar{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Пример 5

Даны точки $A(-3;\,5)$ и $B(1;\,-3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Решение: Сначала найдём вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}(1-(-3);\,-3-5) = \overline{AB}(4;\,-8)$$

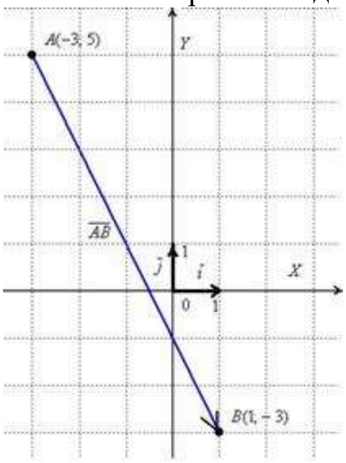
По формуле $\bar{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ вычислим длину вектора:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Не забываем указывать размерность – «единицы»! Всегда ли, кстати, нужно рассчитывать приближенное значение (в данном примере 8,94), если этого не требуется в условии? Округление целесообразно проводить до 2-3-х знаков после запятой.

Выполним чертеж к задаче:



Отличие состоит в том, что здесь речь идёт о векторе, а не об отрезке. Вектор можно переместить в любую точку плоскости.

А в чём сходство Примера 3 и Примера 5? Геометрически очевидно, что длина отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$. Так же очевидно, что длина вектора $\overline{BA}$ будет такой же. По итогу: $|AB| = |\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

Задачу 3 можно было решить и вторым способом, повторю условие: Даны точки $A(-3;\ 5)$ и $B(1;\ -3)$. Найти длину отрезка AB.

Вместо применения формулы $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, поступаем так:

1) Находим вектор $\overline{AB}(1-(-3);\ -3-5) = \overline{AB}(4;\ -8)$.

2) А теперь ссылаемся на то, что длина отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$:

$|AB| = |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Этот способ широко практикуется в ходе решений задач аналитической геометрии.

1 вариант:

На координатной плоскости *Oxy* укажите:

a) точку, симметричную точке P(2;-3) относительно точки Q(1;0);
b) точку, симметричную точке P(-2;5) относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов;
c) точки, расположенные внутри прямоугольника с вершинами A(-1;-3), B(-1;2), C(3;-3), D(3;2).
d) точки, лежащие в третьей четверти;
e) точку, делящую отрезок с концами A(-2;7), B(4;-1) в отношении 1:3.

2 вариант:

На координатной плоскости *Oxy* укажите:

a) точку, симметричную точке К;(-2;3) относительно точки М(0;1);
b) точку, симметричную точке К(2;-5) относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов;

c) точки, расположенные внутри прямоугольника с вершинами A(-1;-3), B(-1;2), C(3;-3), D(3;2).
d) точки, лежащие в четрертой четверти;
e) точку, делящую отрезок с концами A(-2;7), B(4;-1) в отношении 2:3.

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

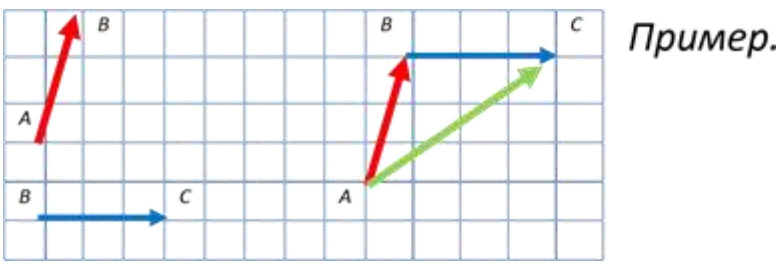
Практическая работа №17: Тренажеры по теме: Координаты и векторы в пространстве

Цель: отработка навыков сложения и вычитания векторов.

Форма организации студентов на занятии: фронтальная.

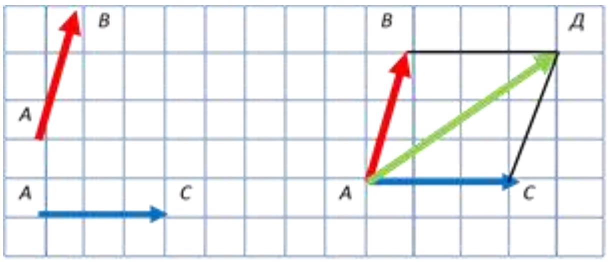
Методические указания. Для того чтобы сложить два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, нужно выбрать произвольную точку и отложить от нее вектор$\overrightarrow{AB}$ (строго по клеточкам все скопировать) и затем от точки B отложить

вектор $\overline{BC}$ (также по клеточкам все скопировать) , тогда вектор $\overline{AC}$ является суммой векторов $\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{BC}$. Это сложение по правилу треугольника.



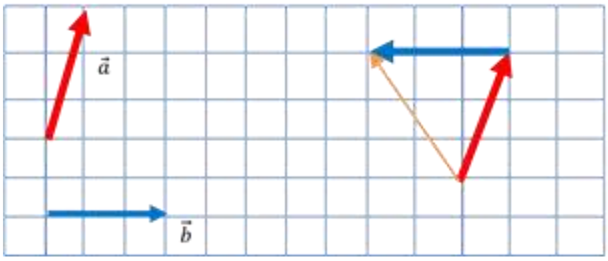
Правило параллелограмма.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AД}$



Вычитание векторов.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{(-b)}$$



1 вариант

1. Какое утверждение **неверное**?

1) Любые два противоположно направленных вектора коллинеарны.

2) Любые два коллинеарных вектора сонаправлены.

3) Любые два равных вектора коллинеарны.

2. Даны точки A, B, C, D, K. Известно, что $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AC} = z \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AK} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$.

Тогда **неверно**, что…

1) все точки лежат в одной плоскости;

2) прямые BC и DK параллельны;

3) точки A, C и D не лежат на одной прямой.

3. Какое утверждение **неверное**?

1) Длины противоположных векторов не могут быть неравны.

2) Если длины векторов неравны, то и векторы неравны.

3) Если длины векторов равны, то и векторы равны.

4. $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, причём точки A, B и C не лежат на одной прямой. Прямые AC и BD **не могут** быть…

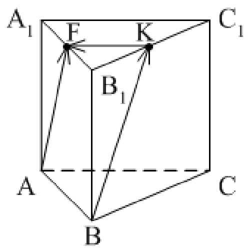
1) параллельными;

2) пересекающимися;

3) скрещивающимися.

5. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. $A_1F = FB_1$, $B_1K = KC_1$.

Какое утверждение **неверное**?



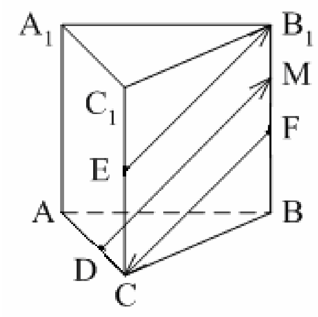
1) $\vec{KF} = -\frac{1}{2}\vec{AC}$.

2) $|\vec{AF}| = |\vec{BK}|$.

3) $\vec{AF} = \vec{BK}$.

6. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. $CE = EC_1$, $BF = FB_1$, $FM = MB_1$, $AD : DC = 3 : 1$.

Какое утверждение **верное**?

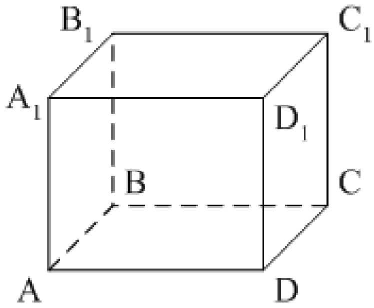


1) $\vec{DM} \uparrow\uparrow \vec{EB_1}$.

2) $\vec{FC} \uparrow\downarrow \vec{DM}$.

3) $\vec{EB_1} \uparrow\downarrow \vec{FC}$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $\vec{AD} = \ldots$



1) $\vec{BB_1} + \vec{DC_1}$;

2) $\vec{D_1C_1} - \vec{DC_1} - \vec{D_1A_1} + \vec{BB_1}$;

3) $\vec{AB_1} - \vec{BC} + \vec{BA} - \vec{CC_1}$.

8. Векторы $\vec{AC_1} - \vec{AC} - \vec{A_1C_1}$ и $\vec{A_1A} - \vec{CB} + \vec{AB}$ **<u>являются</u>**…

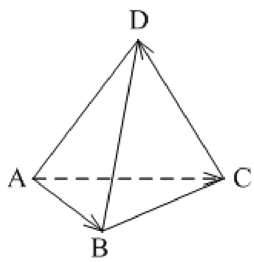
1) равными;

2) противоположными;

3) сонаправленными.

9. $DABC$ – тетраэдр. $\vec{AC} = \vec{AB} - \vec{x} - \vec{CD}.$

Тогда $\vec{x} =$…



1) $\vec{DA}$;

2) $\vec{BC}$;

3) $\vec{DB}$.

2 вариант

1. Какое утверждение **<u>верное</u>**?

1) Любые два сонаправленных вектора коллинеарны.

2) Любые два коллинеарных вектора противоположно направлены.

3) Любые два коллинеарных вектора равны.

2. Какое утверждение **верное**?

1) Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b},\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c},$ то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

2) Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b},\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c},$ то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

3) Существуют векторы $\vec{a},$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

3. Какое утверждение **неверное**?

1) Если длины векторов равны, то и векторы равны.

2) Если векторы равны, то их длины равны.

3) Длины противоположных векторов равны.

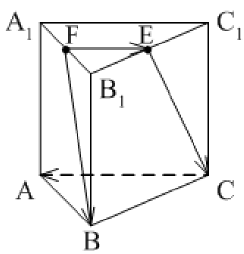
4. $\vec{AB} = k \cdot \vec{CD},$ причём точки *A*, *B* и *C* не лежат на одной прямой. Прямые *AC* и *BD* **являются** параллельными, если…

1) $k = 1$;

2) $k = -1$;

3) $k = 3$.

5. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. $A_1F = FB_1$, $B_1E = EC_1$. Какое утверждение **неверное**?

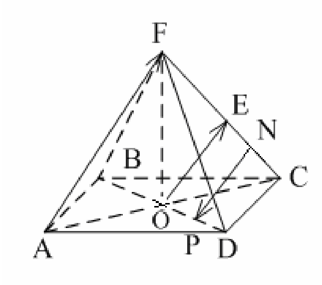


1) $\vec{FE} = \frac{1}{2}\vec{CA}.$

2) $|\vec{FB}| = |\vec{EC}|.$

3) $\vec{FB} \parallel \vec{EC}.$

6. *FABCD* – правильная пирамида. $AC \cap BD = O,$ *FE* = *EC*, *EN* = *NC*, *OP* = *PD*. Какое утверждение **верное**?

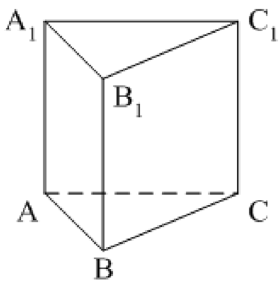


1) $\vec{AF} \uparrow\uparrow \vec{OE}$.

2) $\vec{OE} \uparrow\downarrow \vec{NP}$.

3) $\vec{NP} \uparrow\downarrow \vec{AF}$.

7. $ABCA_1B_1C_1$ – призма. $\vec{CA} = \ldots$



1) $\vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{B_1C};$

2) $\vec{AA_1} - \vec{AB} - \vec{BC_1};$

3) $\vec{AA_1} - \vec{CA} + \vec{BB_1}.$

8. Векторы $-\vec{MN} + \vec{MK} - \vec{AK}$ и $\vec{DC} - \vec{DA} - \vec{NC}$ **являются**…

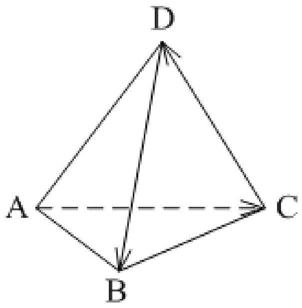
1) противоположными;

2) равными;

3) сонаправленными.

9. $DABC$ – тетраэдр.

$\vec{CD} = \vec{x} - \vec{DB} - \vec{AC}$ …



1) $\vec{BA}$;

2) $\vec{AB}$;

3) $\vec{BC}$.

Критерии оценивания работы:

1. Отметка "5" выставляется, если правильно выполнено 8-9 заданий
2. Отметка "4" выставляется, если правильно выполнено 6-7 заданий
3. Отметка "3" выставляется, если правильно выполнено 5 заданий
4. Отметка "2" выставляется, если правильно выполнено менее 5 заданий

Ключи к правильным ответам:

№ п/п вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2	1	3	3	3	3	2	2	3
2	1	2	1	1	3	1	2	1	2

Практическая работа №18: Тренажеры по теме: Скалярное произведение

Цель: отработка навыков решения упражнений на векторы.

Форма организации студентов на занятии: фронтальная.

Методические указания.

Любой вектор можно разложить по базисным векторам причём

единственным образом. $\vec{d} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, где $\vec{d}\{x; y; z\}$ координаты вектора.

Если известны координаты точек начала и конца вектора, то каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

A$(x_1; y_1; z_1)$ $B(x_2; y_2; z_2)$ $\overline{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

A$(x_1; y_1; z_1)$, $C(x; y; z)$, $B(x_2; y_2; z_2)$

$x = \frac{x_1+x_2}{2}$ $y = \frac{y_1+y_2}{2}$ $z = \frac{z_1+z_2}{2}$

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Длина вектора $\vec{a}\{x; y; z\}$ $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Условие перпендикулярности $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

Вариант 1.

1. Дан квадрат ABCD. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DA}$.
2. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 14$,

$(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$= 60°.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\vec{a}\{4; -2; 3\}$ $\vec{b}\{-1; -2; 5\}$.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб, ребро которого равно 1. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BC}$.
5. Вычислите угол между прямыми AB и CD, если A($\sqrt{3}$; 1; 0), C(0; 2; 0),

B(0; 0; $2\sqrt{2}$), D($\sqrt{3}$; 1; $2\sqrt{2}$).

Вариант 2.

1. Дан квадрат ABCD. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{BC}$.
2. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$,

$(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$= 120˚.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\vec{a}\{2; -1; 3\}$ $\vec{b}\{-2; 2; 3\}$.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб, ребро которого равно 1. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CD}$.
5. Вычислите угол между прямыми AB и CD, если A(6; -4; 8), C(12 ; -6 ; 4),

B(8; -2; 4), D(14; -6; 2).

Вариант 3.

1. Дан квадрат ABCD. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CB}$.
2. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$,

$(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$= 150˚.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i}$ - $3\vec{j}$ +$\vec{k}$ и $\vec{b}$ = $4\vec{i}$ - $\vec{j}$.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб, ребро которого равно 2. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{DC}$.
5. Вычислите угол между прямыми AB и CD, если A(1; 1 ; 5), C(8 ; 5 ; 5),

B(4; 7; 5), D(5; -1 ; 5).

Вариант 4.

1. Дан квадрат ABCD. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{BD}$.
2. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 16$,

$(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$= 135˚.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\vec{a} = 5\vec{i}$ -$2\vec{j}$ +$4\vec{k}$ и $\vec{b}$ = $4\vec{i}$ - $2\vec{k}$.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб, ребро которого равно 3. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.
5. Вычислите угол между прямыми AB и CD, если A(-6; -15; 7), C(14 ; -10; 9),

B(-7; -15; 8), D(14; -10; 7).

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №19: Тренажеры по теме: Углы и вращательное движение

Цель: отработка навыков решения упражнений натригонометрические тождества

Форма организации студентов на занятии: индивидуальная.

Методические указания.

В геометрии угол определяется как часть плоскости, ограниченная двумя лучами. При таком определении получаются углы от 0° до 180°. Однако угол можно рассматривать и как меру поворота. Это отношение может быть выбрано характеристикой и мерой данного угла: $\alpha = \frac{l}{R}$.

Такая мера называется радианной мерой угла и используется наравне с угловой. Говорят, что угол равен определенному числу радиан. Ясно, что угол в один радиан опирается на длину дуги окружности, равную еѐ радиусу.

Обозначение радиана – «рад».

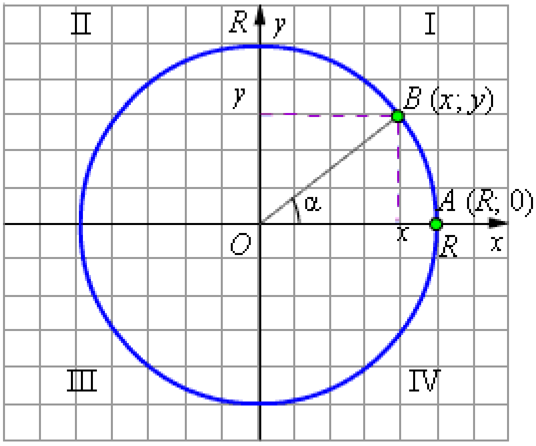
Угол, градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол, радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	П	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Как известно, координатные оси делят окружность на четыре дуги,

которые называют четвертями.

	Значения							
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Функция	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	•
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

ctg α –	$\sqrt{3}$ 1 $\frac{1}{\sqrt{3}}$	0 –	0 –



Окружность единичного радиуса с центром в начале координат называется тригонометрической окружностью.

четвертям				
	I	II	III	IV
sin α	+	+	–	–
cos α	+	–	–	+
tg α	+	–	+	–
ctg α	+	–	+	–

Поскольку синус по определению равен ординате точки на единичной окружности, а косинус − абсциссе, то знаки тригонометрических функций по четвертям ***будут такими:***

1 вариант:

1. Переведите из градусной меры угла в радианную:

150^0; 209^0; 205^0; 340^0; 235^0.

2. Переведите из радианной меры угла в градусную:

$-\frac{10\pi}{6}$; $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{39\pi}{10}$; $\frac{4\pi}{9.}$

3. Определите четверть, в которой лежит данный угол:

-800^0; 2000^0; $\frac{11\pi}{8}$; $-\frac{2\pi}{5}$; $\frac{11\pi}{5}$.

2 вариант:

1. Переведите из градусной меры угла в радианную:

230^0; 160^0; 330^0; 215^0; 360^0.

2. Переведите из радианной меры угла в градусную:

$\frac{11\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$; $\frac{21\pi}{11}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

3. Определите четверть, в которой лежит данный угол:

760^0; -1900^0; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{7}$; $-\frac{12\pi}{13}$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Допущена одна ошибка в одном из пунктов
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 11-13 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 7-10 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 7 заданий

Практическая работа №20 Тренажеры по теме: Тригонометрические операции

Форма организации студентов на занятии: фронтальная.

Методические указания.

I. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

II. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

III. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

IV. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

V. $\cos 2\alpha = cos^2 \propto - sin^2 \propto$

VI. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

VII. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

VIII. $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

IX. $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

ПРИМЕР №1.

Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2cos^2\propto} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$

ПРИМЕР №2

Вычислите

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{8}}{1+tg^2\frac{\pi}{8}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{cos^2\frac{\pi}{8}}} = 2\sqrt{2}tg\frac{\pi}{8}\cdot cos^2\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2}\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cdot cos^2\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

1 вариант

1. Найти значение выражения:
   а) $\cos107^0\cdot\cos17^0+\sin107^0\cdot\sin17^0$;
   б) $\cos 36^0\cdot\cos 24^0-\sin 36^0\cdot\sin 24^0$;
   в) $\sin 63^0\cdot\cos 27^0+\cos63^0\cdot\sin 27^0$;
   г) $\sin51^0\cdot\cos 21^0-\cos 51^0\cdot\sin 21^0$.
2. Вычислите6

а)$\sin(-\frac{\pi}{3})$;

б)$tg(-\frac{\pi}{4})$;

в)$\cos240^0$;

г)$ctg315^0$;

д)$\sin\frac{4\pi}{3}$;

е)$tg\frac{5\pi}{6}$;

ж)$\sin 690^0$;

з)$tg660^0$;

2 вариант

1. Найдите значение выражения:
   а) $\sin 63^0\cdot\cos 27^0+\cos63^0\cdot\sin 27^0$;
   б) $\sin51^0\cdot\cos 21^0-\cos 51^0\cdot\sin 21^0$.
   в) $\cos\frac{5\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}$;
   г) $\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.
2. Вычислить:

а)$\cos(-\frac{\pi}{4})$;

б)$ctg(-\frac{\pi}{6})$;

в)$\sin330^0$;

г)$tg150^0$;

д)$ctg\frac{2\pi}{3}$;

е)$\cos\frac{7\pi}{6}$;

ж)$\sin 1020^0$;

з)ctg390^0;

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Допущена одна ошибка в одном из пунктов
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 8-10 заданий
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 5-7 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 5 заданий

Практическая работа №21 Тренажеры по теме: Преобразование тригонометрических выражений

Цель: отработка навыков решения упражнений натригонометрические тождества.

Форма организации студентов на занятии: индивидуальная.

Методические указания.

I. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

II. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

III. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

IV. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

V. $\cos 2\alpha = cos^2 \propto - sin^2 \propto$

VI. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

VII. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

VIII. $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

IX. $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

ПРИМЕР №1.

Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2cos^2\propto} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$

ПРИМЕР №2

Вычислите

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{8}}{1+tg^2\frac{\pi}{8}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{cos^2\frac{\pi}{8}}} = 2\sqrt{2}tg\frac{\pi}{8}\cdot cos^2\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2}\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cdot cos^2\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

1 вариант

1. Упростите выражения:
   a) $5\sin^2\alpha - 0{,}61 + 5\cos^2\alpha.$
   b) $\frac{\cos x - 1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x + 1}{\sin x}.$
   c) $\frac{1-\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}.$
   d) $tg^2\alpha : (1-\cos^2\alpha).$
2. Вычислите:
   a) $\sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{4}.$
   b) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + ctg^2\frac{\pi}{6}.$
3. Найдите значение других трех основных тригонометрических функций, если:
   $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \pi.$

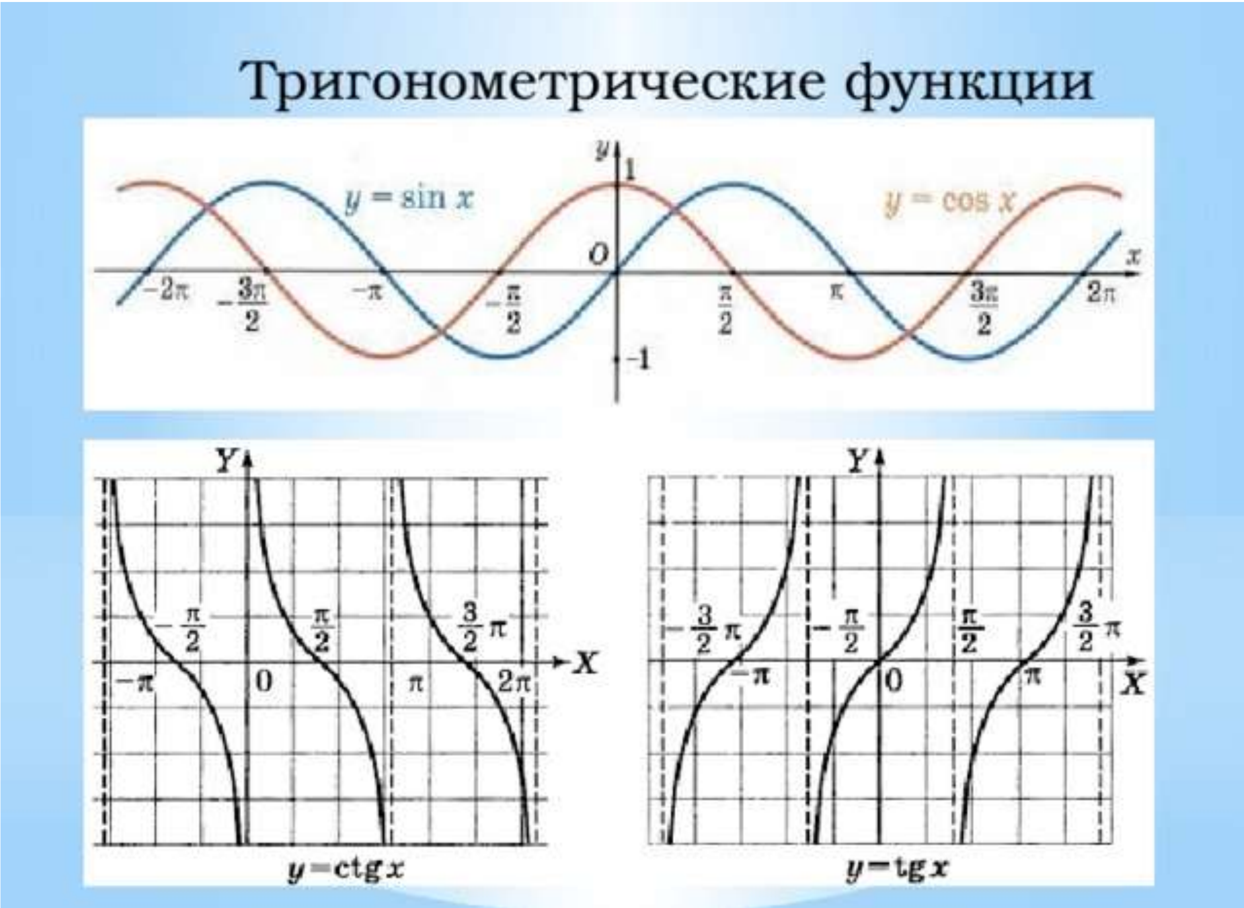
2 вариант

1. Упростите выражения:
   a) $3\cos^2\alpha - 6 + 3\sin^2\alpha.$
   b) $\frac{\sin x - 1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x + 1}{\cos x}.$
   c) $\frac{1+\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1-\cos x}.$
   d) $ctg^2\alpha : (1-\sin^2\alpha).$
2. Вычислите:
   a) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos 0 - tg^2\frac{\pi}{3}.$
   b) $3tg\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}.$
3. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:
   $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad 0 \prec \alpha \prec \frac{\pi}{2}.$

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 5-6 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3-4 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №22 Тренажеры по теме: Тригонометрические функции



1 вариант

Постройте в одной системе координат следующие графики функций:

а) $$y = \sin x$$
$$y = \sin x - 2$$
$$y = \sin x + 2$$
$$y = 2\sin x$$
$$y = \frac{1}{2}\sin x$$

b) $y=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2};+\infty\right)\\ ctgx, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$

2 вариант

Постройте в одной системе координат следующие графики функций:

a) $y=\cos x$
$y=\cos x-3$
$y=\cos x+3$
$y=3\cos x$
$y=\dfrac{1}{3}\cos x$

b) $y=\begin{cases}\sin x, & x\in(-\infty;0]\\ tgx, & x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Допущена одна не значительная ошибка при построении одного графика
«Удовлетворительно»	Допущено не более двух ошибок при построении графиков
«Неудовлетворительно»	Допущено более двух ошибок при построении графиков

Практическая работа №23 Тренажеры по теме: Тригонометрические уравнения

Цель: отработка навыковрешения упражнений натригонометрические уравнения.

Форма организации студентов на занятии: фронтальная.

Методические указания.

Формула	***примеры***

$\sin x = a$ ***, не имеет решений при*** $\lvert a\rvert > 1$ ***и имеет бесконечное множество решений при*** $\lvert a\rvert < 1$ ***, которые находятся по формуле*** $x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, n\epsilon z$	***1)*** $\sin x = 1{,}2$ ***Не имеет решения*** ***2)***
$\cos x = a,$ ***не имеет решений при*** $\lvert a\rvert > 1$ ***и имеет бесконечное множество решений при*** $\lvert a\rvert < 1$ ***, которые находятся по формуле*** $x = \pm arccosa + 2\pi n, n\epsilon z$	***1)*** $\cos x = -1{,}01$ ***Не имеет решения***
$tgx = a$ ***имеет решение при любом действительном значении а, оно находится по формуле*** $x = arctga + \pi n, n\epsilon z$ $arctg(-a) = -arctga$ $arcctg(-a) = \pi - arcctga$	$tgx = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon z$

1 вариант

1. Найдите значение выражения:

$$2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2. Решите уравнение:

1) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2) $2 \cdot tg^2 x - tgx - 3 = 0$

3) $\sin 3x - \sin 5x = 0$

3. Решите неравенство:

$\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 вариант

1. Найдите значение выражения:

$$4 \cdot \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \arcsin(-1)$$

2. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

2) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$

3) $\cos x + \cos 5x = 0$

3. Решите неравенство

$$\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3 вариант

1. Найдите значение выражения:

$$4 \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 \cdot arctg\left(-\sqrt{3}\right)$$

2. Решите уравнение:

1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

2) $\operatorname{tg}^2 x - tgx - 12 = 0$

3) $\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = 0$

3. Решите неравенство:

$$\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4 вариант

1. Найдите значение выражения:

$$6 \cdot \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

2. Решите уравнение:

1) $\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $6 \cdot \cos^2 x + 7 \cdot \cos x - 3 = 0$

3) $tg^2 x - tg\ x = 0$

3. Решите неравенство:

$\operatorname{tg} x \le -1$

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно

«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4-5 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №24 Тренажеры по теме: Схема исследования функции

Алгоритм получения необходимых данных.

1.Нахождение области определения функции

Определение интервалов, на которых функция существует.

2.Нули функции

Для вычисления нулей функции, необходимо приравнять заданную функцию к нулю и решить полученное уравнение. На графике это точки пересечения с осью OX.

3.Четность, нечетность функции

Функция четная, если y(-x) = y(x). Функция нечетная, если y(-x) = -y(x). Если функция четная – график функции симметричен относительно оси ординат (OY). Если функция нечетная – график функции симметричен относительно начала координат.

4.Промежутки знакопостоянства

Расстановка знаков на каждом из интервалов области определения. Функция положительна на интервале - график расположен выше оси абсцисс. Функция отрицательна - график ниже оси абсцисс.

5. Промежутки возрастания и убывания функции.

Для определения вычисляем первую производную, приравниваем ее к нулю. Полученные нули и точки области определения выносим на числовую прямую. Для каждого интервала определяем знак производной. Производная положительна - график функции возрастает, отрицательна - убывает.

6. Выпуклость, вогнутость.

Вычисляем вторую производную. Находим значения, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Вторая производная положительна - график функции выпукл вверх. Отрицательна - график функции выпукл вниз.

7. Наклонные асимптоты.

1 вариант

1. Проведите по общей схеме исследование функции и постройте ее график
$y = x^2 – 4x + 1$

2. Постройте график функции f, если известны её свойства:

1) Область определения: [- 6; 6], область значений: [- 2; 5]
2) Точки пересечения графика с осью ***Ox*** : A (-4; 0), B (-2; 0)

3) Точки пересечения графика с осью ***Oy***: C (0; 2,5)
4) Промежутки знакопостоянства **f (x) > 0**: [-6; -4), (-2; 6]; **f (x) < 0**: (-4; -2)
5) Промежутки ***возрастания***: [-3; 1], [4; 6]; ***убывания:*** [-6; -3], [1; 4]
6) x_{max} = 1, f (1) = 3; x_{min} = - 3, f (-3) = - 2; x_{min} = 4, f (4) =1
7) Дополнительные точки графика f (-6) = 3, f (6) = 5

2 вариант

1. Проведите по общей схеме исследование функции и постройте ее график $y = -x^2 + 3x - 2$

2. Постройте график функции f, если известны её свойства:

1) Область определения: [- 5; 4], область значений: [0; 6]
2) Точки пересечения графика с осью ***Ox*** : O (0; 0)
3) Точки пересечения графика с осью ***Oy***: C (0; 2,5)
4) Промежутки знакопостоянства **f (x) > 0**: [-5; 0), (0; 4]
5) Промежутки ***возрастания***: [-5; -2], [0; 4]; ***убывания:*** [-2; 0]
6) x_{max} = - 2, f (-2) = 2; x_{min} = 0, f (0) = 0
7) Дополнительные точки графика f (-5) = 0,5, f (4) = 6

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно, допущена ошибка при выполнении №1 и №2 не более чем в одном пункте
«Хорошо»	Допущена ошибка при выполнении №1 и №2 не более чем в трех пунктах
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 1 задания
«Неудовлетворительно»	Не выполнено ни одно задание

Практическая работа №25 Тренажеры по теме: Преобразование функций и действия над ними

Преобразование графиков функций
В этой статье я познакомлю вас с линейными преобразованиями графиков функций и покажу, как с помощью этих преобразований из графика функции $y=\sqrt{x}$ получить график функции $y=\left|2-3\sqrt{\left|\frac{1}{2}x+2\right|}\right|$

Линейным преобразованием функции $y=f(x)$ называется преобразование самой функции и/или ее аргумента к виду $y=Af(kx+b)+D$, а также преобразование, содержащее модуль аргумента и/или функции.
Наибольшие затруднения при построении графиков с помощью линейных преобразований вызывают следующие действия:

1. Вычленение базовой функции, собственно, график которой мы и преобразовываем.
2. Определения порядка преобразований.

Именно на этих моментах мы и остановимся подробнее.
Рассмотрим внимательно функцию
$y=\left|2-3\sqrt{\left|\frac{1}{2}x+2\right|}\right|$

В ее основе лежит функция $f(x)=\sqrt{x}$. Назовем ее **базовой функцией**.

При построении графика функции $y=\left|2-3\sqrt{\left|\frac{1}{2}x+2\right|}\right|$ мы совершаем преобразования графика базовой функции $f(x)=\sqrt{x}$.

Если бы мы совершали преобразования функции $y=\left|2-3\sqrt{\left|\frac{1}{2}x+2\right|}\right|$ в том же порядке, в каком находили ее значение при определенном значении аргумента, то

- сначала мы бы нашли значение выражения, стоящего под знаком корня: $\left|\frac{1}{2}x+2\right|$. Обозначим это выражение $g(x)=\left|\frac{1}{2}x+2\right|$. Назовем преобразование $g(x)$ внутренним преобразованием, или **преобразованием аргумента**.
- затем мы бы нашли значение базовой функции $f(x)=\sqrt{x}$ в этой точке: $f(g(x))=\sqrt{g(x)}$
- после этого мы бы совершили преобразование самой функции: $y=\left|2-3f(g(x))\right|$. Назовем его внешним преобразованием, или **преобразованием функции**.

Рассмотрим какие виды линейных преобразований аргумента и функции существуют, и как их выполнять.

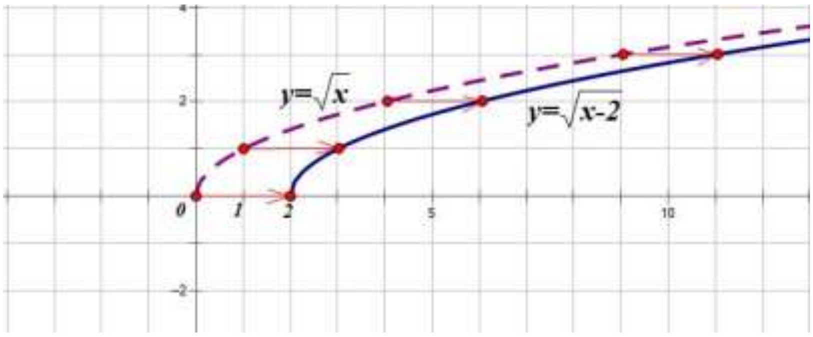
Преобразования аргумента.

1. f(x) $\rightarrow$ f(x+b)

1. Строим график фунции $y=f(x)$
2. Сдвигаем график фунции $y=f(x)$ вдоль оси OX на |b| единиц
   - влево, если b>0
   - вправо, если b<0

Построим график функции $y=\sqrt{x-2}$

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}$
2. Сдвигаем его на 2 единицы вправо:



2. f(x) → f(kx)

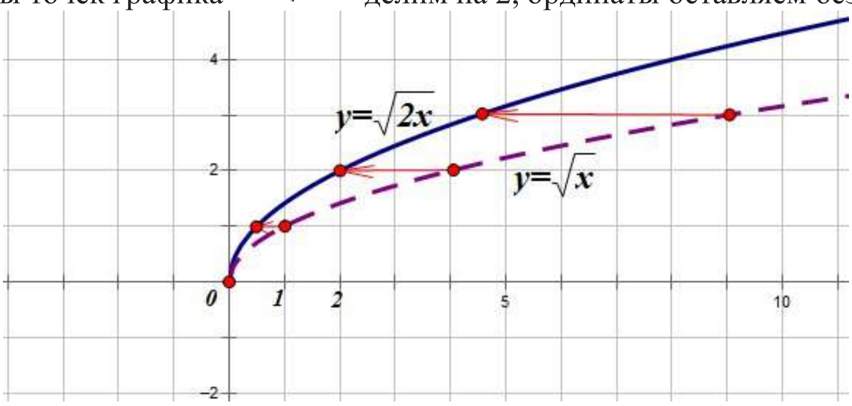
1. Строим график фунции $y = f(x)$

2. Абсциссы точек графика $y = f(x)$ делим на к, ординаты точек оставляем без изменений.

Построим график функции $y = \sqrt{2x}$.

1. Строим график функции $y = \sqrt{x}$

2. Все абсциссы точек графика $y = \sqrt{2x}$ делим на 2, ординаты оставляем без изменений:

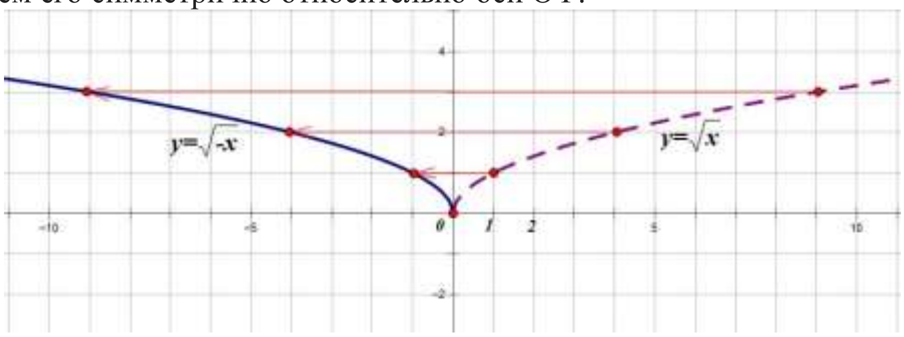


3. f(x) → f(-x)

1. Строим график фунции $y = f(x)$
2. Отображаем его симметрично относительно оси OY.

Построим график функции $y = \sqrt{-x}$.

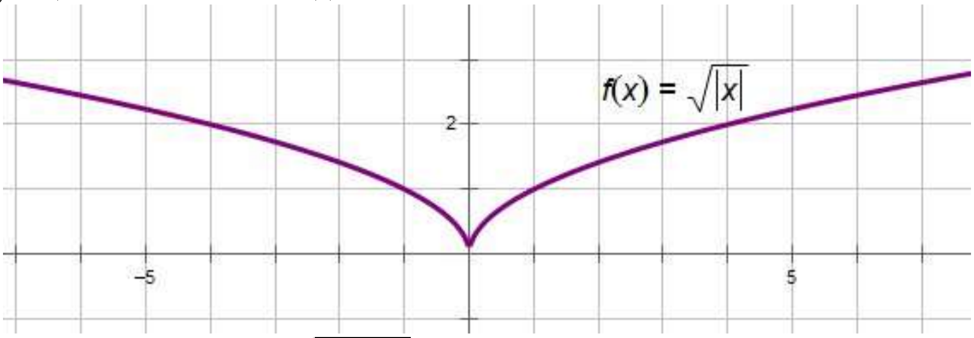
1. Строим график функции $y = \sqrt{x}$
2. Отображаем его симметрично относительно оси OY:



4. **f(x) → f(|x|)**

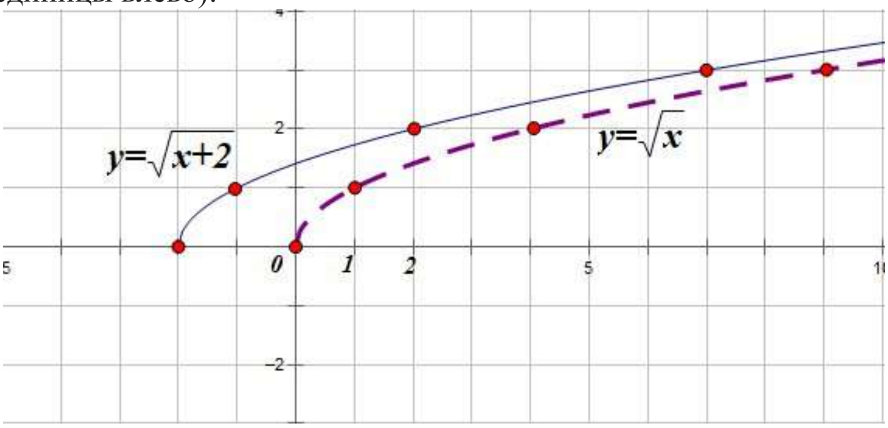
1. Строим график функции $y = f(x)$
2. Часть графика, расположенную левее оси OY стираем, часть графика, расположенную правее оси OY Достраиваем симметрично относительно оси OY:

График функции $y=\sqrt{|x|}$ выглядит так:

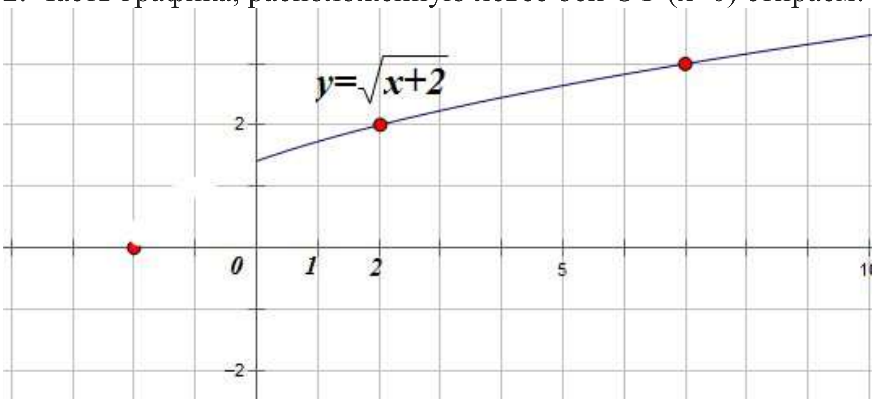


Построим график функции $y=\sqrt{|x|+2}$

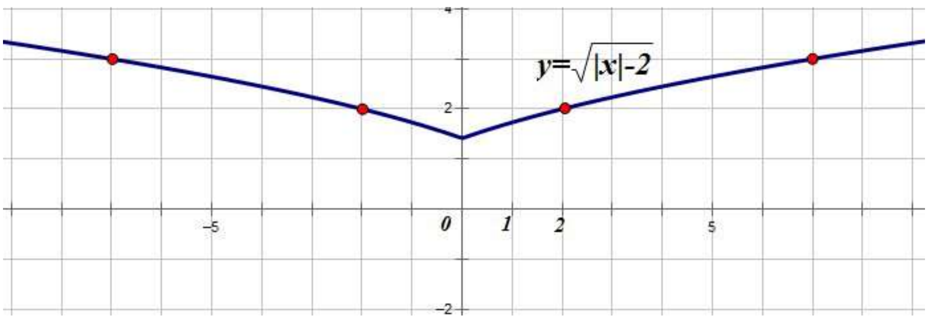
1. Строим график функции $y=\sqrt{x+2}$ (это график функции $y=\sqrt{x}$, смещенный вдоль оси OX на 2 единицы влево):



2. Часть графика, расположенную левее оси OY (x<0) стираем:



3. Часть графика, расположенную правее оси OY (x>0) достраиваем симметрично относительно оси OY:



Важно! Два главных правила преобразования аргумента.

1. Все преобразования аргумента совершаются вдоль оси OX
2. Все преобразования аргумента совершаются "наоборот" и "в обратном порядке".

Например, в функции $y=\sqrt{|x|+2}$ последовательность преобразований аргумента такая:
1. Берем модуль от x.
2. К модулю x прибавляем число 2.
Но построение графика мы совершали в обратном порядке:
Сначала выполнили преобразование 2. - сместили график на 2 единицы влево (то есть абсциссы точек уменьшили на 2, как бы "наоборот")
Затем выполнили преобразование f(x) $\rightarrow$ f(|x|).
Коротко последовательность преобразований записывается так:

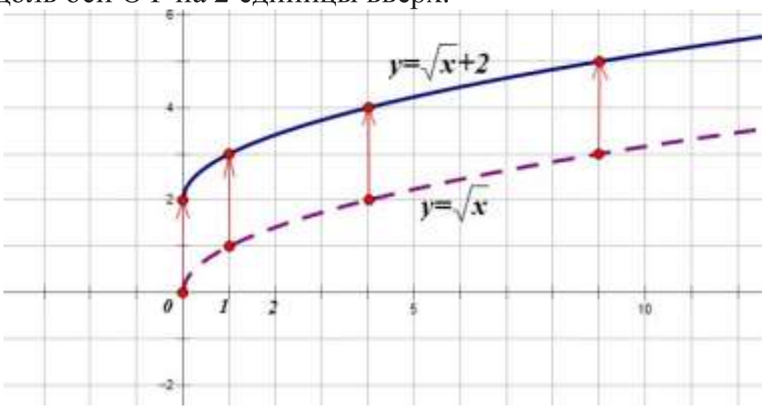
Последовательность действий	Последовательность преобразований
1. |x|	2. Часть графика, где x<0 стираем, часть графика, где x>0 достраиваем симметрично относительно оси OY
2. |x|+2	1. Смещаем график на 2 единицы влево вдоль оси OX

Теперь поговорим о **преобразовании функции**. Преобразования совершаются
1. Вдоль оси OY.
2. В той же последовательности, в какой выполняются действия.
Вот эти преобразования:

1. f(x)$\rightarrow$ f(x)+D

1. Строим график функции y=f(x)
2. Смещаем его вдоль оси OY на |D| единиц
- вверх, если D>0
- вниз, если D<0

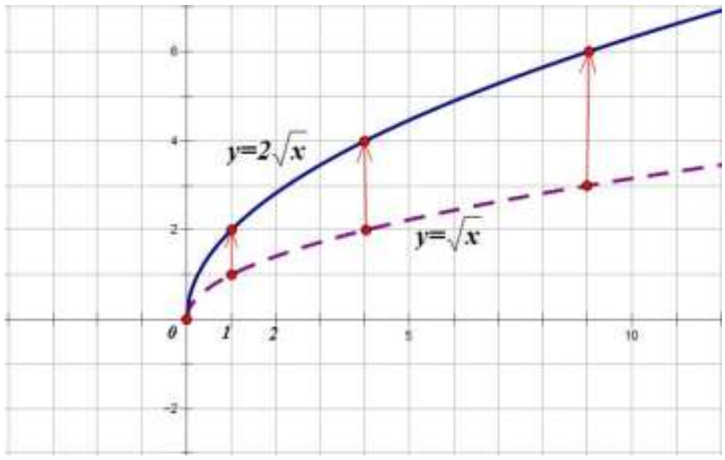
Построим график функции $y=\sqrt{x}+2$
1. Строим график функции $y=\sqrt{x}$
2. Смещаем его вдоль оси OY на 2 единицы вверх:



2. f(x)$\rightarrow$ Af(x)

1. Строим график функции y=f(x)
2. Ординаты всех точек графика умножаем на A, абсциссы оставляем без изменений.

Построим график функции $y=2\sqrt{x}$
1. Построим график функции $y=\sqrt{x}$
2. Ординаты всех точек графика умножим на 2:

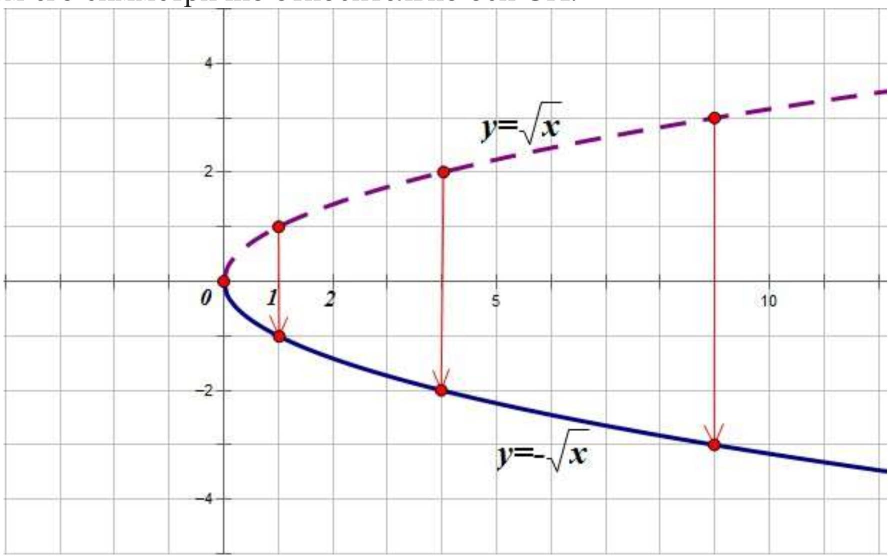


3. f(x)→ -f(x)

1. Строим график функции y=f(x)
2. Отображаем его симметрично относительно оси OX.

Построим график функции $y=-\sqrt{x}$.

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}$.
2. Отображаем его симметрично относительно оси OX.

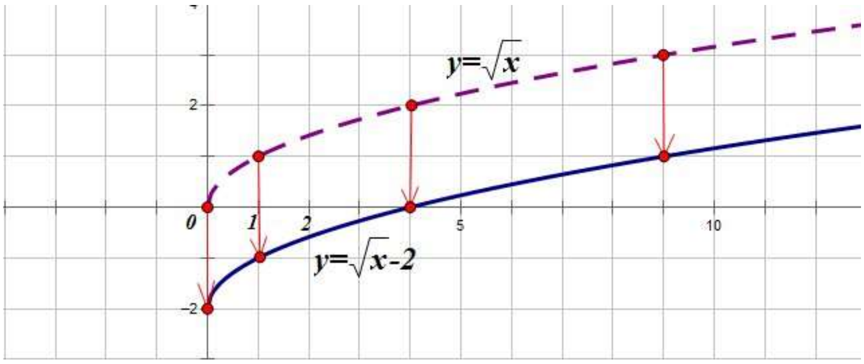


4. f(x)→ |f(x)|

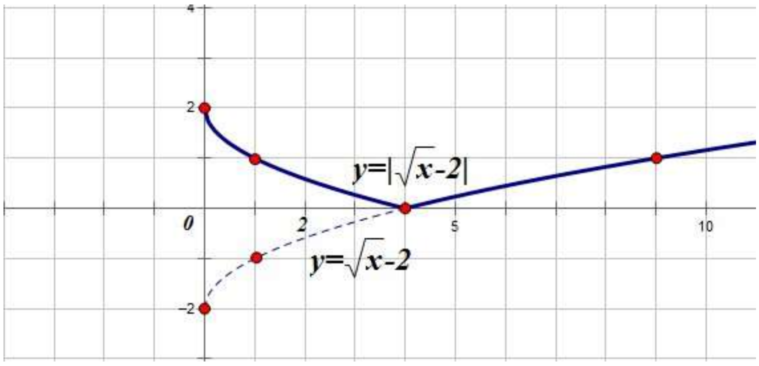
1. Строим график функции y=f(x)
2. Часть графика, расположенную выше оси OX оставляем без изменений, часть графика, расположенную ниже оси OX, отображаем симметрично относительно этой оси.

Построим график функции $y=\left|\sqrt{x}-2\right|$

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}-2$. Он получается смещением графика функции $y=\sqrt{x}$ вдоль оси OY на 2 единицы вниз:



2. Теперь часть графика, расположенную ниже оси ОХ, отобразим симметрично относительно этой оси:



И последнее преобразование, которое, строго говоря, нельзя назвать преобразованием функции, поскольку результат этого преобразования функцией уже не является:

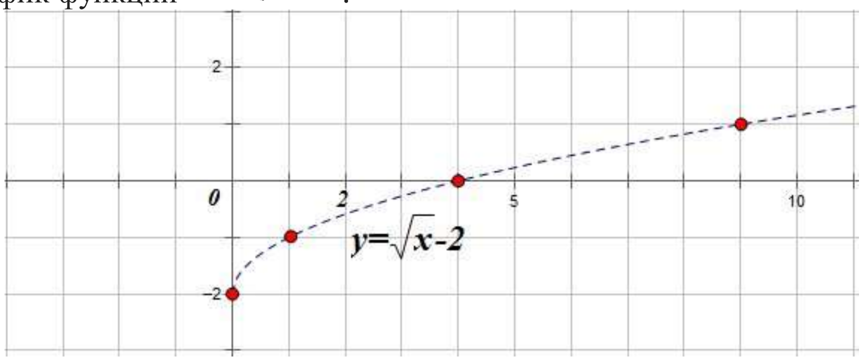
$y=f(x) \rightarrow |y|=f(x)$

1. Строим график функции y=f(x)

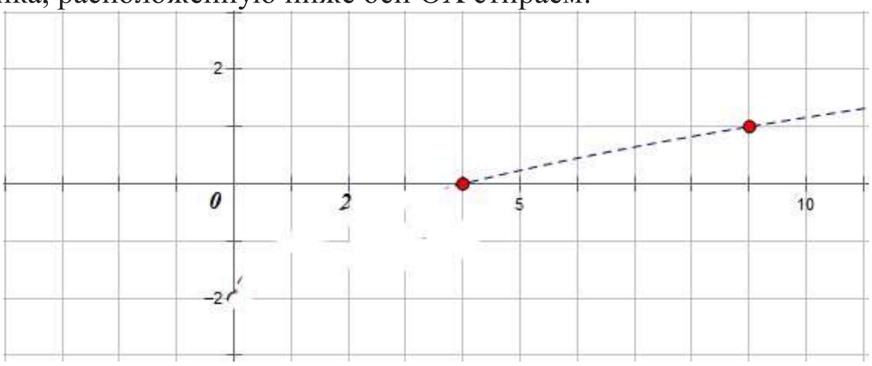
2. Часть графика, расположенную ниже оси ОХ стираем, затем часть графика, расположенную выше оси ОХ достраиваем симметрично относительно этой оси.

Построим график уравнения $|y|=\sqrt{x}-2$

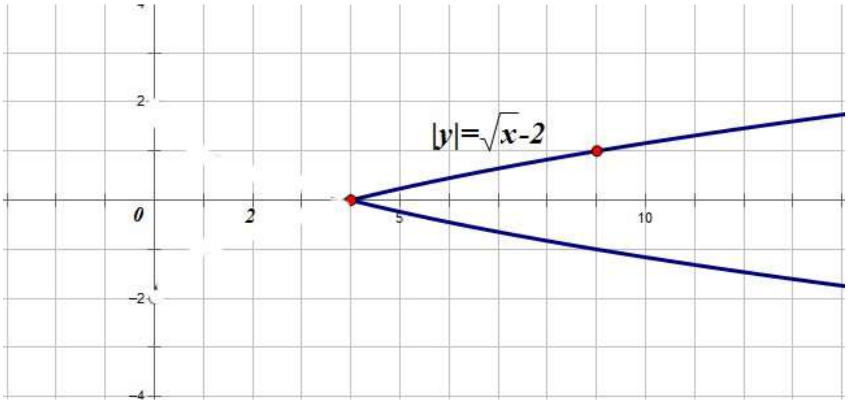
1. Строим график функции $y=\sqrt{x}-2$:



2. Часть графика, расположенную ниже оси ОХ стираем:



3. Часть графика, расположенную выше оси OX достраиваем симметрично относительно этой оси.



1 вариант

Построить графики функций:

$f(x)=-(x+3)^2+5$

$f(x)=\sqrt{x-5}$

$f(x)=\sqrt{x+2}-3$ и выполнить исследование, найти:

1) область определения функции;
2) область значения функции;
3) точки пересечения с осями координат;
4) промежутки возрастания функции;
5) промежутки убывания функции;
6) значения x, при которых f(x) > 0 и f(x) < 0;

2 вариант

Построить графики функций:

$f(x)=-(x-4)^2+2$

$f(x)=\sqrt{x}+3$

$f(x)=\sqrt{x-2}+3$ и выполнить исследование, найти:

1) область определения функции;
2) область значения функции;
3) точки пересечения с осями координат;
4) промежутки возрастания функции;
5) промежутки убывания функции;
6) значения x, при которых f(x) > 0 и f(x) < 0;

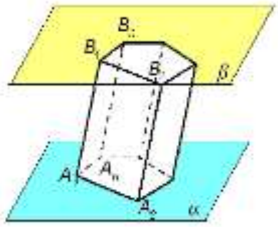
Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнено любое 1 задание
«Неудовлетворительно»	Не выполнено ни одно задание

Практическая работа №26 Тренажеры по теме: Параллелепипеды и призмы

Призма. Виды призм.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников A_1 A_2 A_3….A_n и B_1B_2 B_3…B_n, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется призмой.



Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие вершины, - боковыми ребрами призмы.

A1A2…An и B1B2…Bn – основания призмы.

A1A2B2B1, A2A3B3B2, …., AnA1B1Bn – боковые грани призмы,

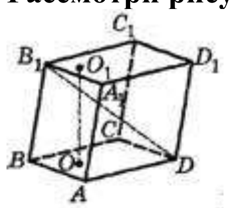
A1B1, A2B2, …, AnBn –боковые ребра призмы.

Обрати внимание: призма обозначается последовательным названием ее оснований: A1A2…AnB1B2…Bn.

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой – либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания (или расстояние между плоскостями оснований призмы)

Диагональю призмы называется отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

Рассмотри рисунок:



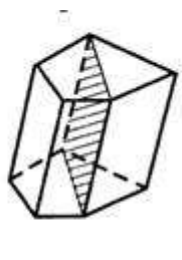
OO1 – высота призмы, B1D – диагональ призмы.

Свойства призмы.

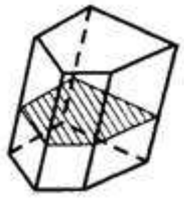
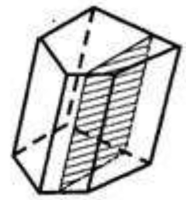
1) Основания призмы – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.
2) Боковые ребра призмы параллельны и равны.
3) Боковые грани призмы – параллелограммы.

Определение диагонального сечения призмы

Диагональным сечением призмы называется сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.



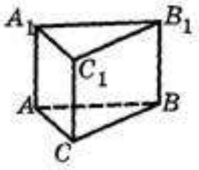
- Сечением призмы плоскостью, параллельной основаниям, является многоугольником, равным многоугольникам оснований.
- Сечением призмы плоскостью, параллельной боковым ребрам, является параллелограммом.

Виды призм.

Прямая призма.

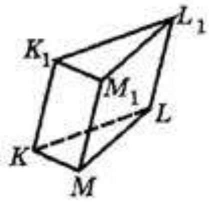
Выучи. Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.



ABCA1B1C1 – прямая призма.

Наклонная призма.

Призма называется наклонной, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям.



KLMK1L1M1 – наклонная призма.

Обрати внимание и используй при решении задач.

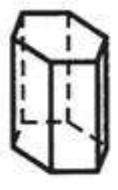
Свойства прямой призмы:

Основания прямой призмы – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.

Боковые ребра прямой призмы параллельны, равны и перпендикулярны плоскостям оснований (являются высотами). Высота прямой призмы равна длине бокового ребра.

Правильная призма.

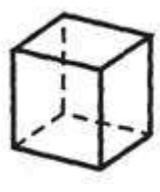
Правильной призмой называется прямая призма, основания которой – правильные многоугольники.



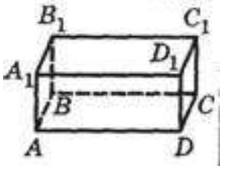
Параллелепипед.

Параллелепипедом называется призма, основание которой – параллелограмм

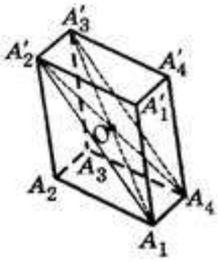
Обрати внимание: так как параллелепипед является призмой, то все свойства призмы справедливы и для параллелепипеда.



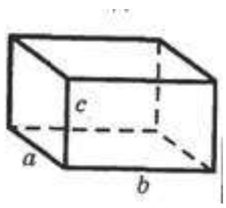
Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими. АВСД и А1В1С1Д1, АА1В1В и ДД1С1С, АА1Д1Д и ВВ1С1С – противолежащие грани. Грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными.



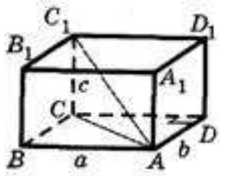
ТЕОРЕМА Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.
ТЕОРЕМА Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.



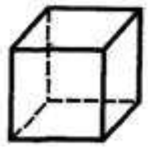
Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является центром его симметрии.
Виды параллелепипедов. **Прямоугольный параллелепипед.**
Параллелепипед называется прямым, если его боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований.
Обрати внимание: прямой параллелепипед является прямой призмой, основание которой – параллелограмм.
Свойства прямоугольного параллелепипеда:
1) Основания прямого параллелепипеда – равные параллелограммы, лежащие в параллельных плоскостях.
2) Боковые ребра прямого параллелепипеда параллельны, равны и перпендикулярны плоскостям оснований. Высота прямого параллелепипеда равна длине бокового ребра.
3) Противолежащие боковые прямого параллелепипеда – равные прямоугольники. Плоскости боковых граней перпендикулярны плоскостям оснований.
4) Диагонали прямого параллелепипеда точкой пересечения делятся пополам.
Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник.



Теорема:
Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



Свойства прямоугольного параллелепипеда:
1. Противолежащие грани прямоугольного параллелепипеда (в том числе основания) — равные прямоугольники.
2. Боковые ребра прямоугольного параллелепипеда параллельных, равны и перпендикулярны плоскостям оснований.
3. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.
4. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны и точкой пересечения делятся пополам.
5. Диагональные сечения прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.
Кубом называется прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны.



Свойства куба:
1. Все грани куба равные квадраты.
2. Из каждой вершины куба исходят три взаимно перпендикулярных равных ребра.
3. Все двугранные углы куба — прямые.
4. Диагонали куба с ребром а равны $a\sqrt{3}$ и точкой пересечения делятся пополам.
5. Диагональное сечение куба с ребром а — прямоугольник со сторонами а и $a\sqrt{2}$
Правильные многогранники.
Определение: Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

1 вариант
1.Является ли призма правильной, если её ребра равны?
а) да; в) нет. Обоснуйте свой ответ.
2.Высота правильной треугольной призмы равна 3 см. Сторона основания равна 4 см. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.
3. Площади двух боковых граней наклонной треугольной призмы равны 50 и 30 см^2. Угол между этими гранями прямой. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены сечения A_1BC и CB_1D_1. В каком отношении эти плоскости делят диагональ AC_1.

2 вариант
1.Может ли основание наклонного параллелепипеда быть прямоугольником?
а) да; в) нет. Ответ обоснуйте.
2. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если три его ребра имеют длины 6, 7, и 8 см.

3. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, если стороны его основания равны 3 и 5 см, угол между ними 60^0, а высота параллелепипеда равна 7см.
4. Могут ли две боковые грани наклонного параллелепипеда быть перпендикулярными плоскости основания?

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №27 Тренажеры по теме: Пирамиды

Пирамидой называется многогранник, одной из граней служит многоугольник (основание пирамиды) , а остальные грани (боковые) треугольники с общей вершиной (вершина пирамиды). Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник и вершина проектируется в центр основания, называется правильной. Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды называется апофемой (SN). Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость её основания (OS) называется высотой пирамиды.

В зависимости от условия задачи основанием правильного многоугольника может быть правильный треугольник , квадрат и т.д. Пусть $a_n -$ сторона правильного $n-$угольника; $r_n -$ радиус вписанной окружности.

Тогда $a_n = 2tg\frac{180^0}{n}\cdot r_n$, $S = \frac{1}{2}\cdot P\cdot r_n$, где P это периметр многоугольника.

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту. –

Если в основании лежит квадрат, то $S_{основания} = a^2$

Если в основании лежит равносторонний треугольник, то √

Напомним также, что высота перпендикулярна к плоскости основания, то есть высота перпендикулярна к любой прямой лежащей в плоскости основания.

1 вариант 1

1. Сколько ребер у шестиугольной пирамиды:
а)6; б)12; в)18; г)24;
2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида:
а)5; б)4 в)10; г)6
3. Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет
а) Многогранник, составленный из n-треугольников, называется пирамидой;
б) Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;
в) Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой;
4.Задача. Крыша башни имеет вид правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 12 м, а высота 18 м. Сколько понадобится плиток на покрытие этой крыши, если каждая плитка имеет вид прямоугольника со сторонами 22 см и 18 см.

2 вариант
1. Сколько граней у шестиугольной пирамиды:
а)6; б)7; в)8; г)10;
2. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида:
а)6; б)5; в)4; г)7;
3 Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет
а) Высота пирамиды называется высотой грани;
б) Площадь боковой поверхности пирамиды равна произведению периметра основания на высоту;
в) Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;
4.Задачи. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса – имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 150 м и боковым ребром 220 м. Найдите площадь боковой поверхности

3 вариант
1. Сколько ребер у четырехугольной пирамиды:
а)6; б)12; в) 8
2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида:
а)5; б)4 в)10; г)6
3.Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет
а)Существует ли четырехугольная пирамида, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию?
б)Высота пирамиды, это перпендикуляр, проведённый из вершины к основанию.
в)Общая точка боковых граней пирамиды называется вершиной
4.Задача. Крыша имеет форму пирамиды с квадратным основанием 4,5 м х 4,5 м и высотой 4 м. Сколько листов железа размером 70 см х 140 см нужно для покрытия крыши, если на отходы нужно добавить 10% площади крыши?

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №28 Тренажеры по теме: Круглые тела

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии нанахождение площадей поверхно сти тел вращения.

Методические указания.

Пример1.

Дан цилиндр. Осевое сечение -квадрат. Площадь основания равна4π. Найти площадб полной поверхности.

Решение.

$$S_{\text{боковой поверхности}} = 2\pi Rh.$$

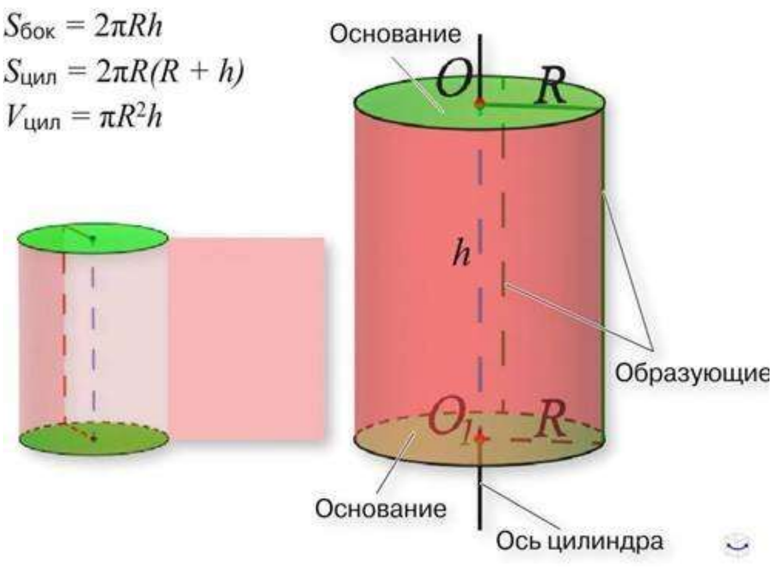
$S_{\text{основания}} = \pi R^2 = 4\pi \to R = 2$

$S_{\text{осевого сечения } ABCD} = 2R \cdot h$. Так как $ABCD -$ квадрат, то $R = h = 2$

$S_{\text{боковой поверхности}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi.$

$S_{\text{полной поверхности}} = S_{\text{боковой поверхности}} + 2S_{\text{основания}} = 16\pi$

Ответ. $16\,\pi$



Пример 2.

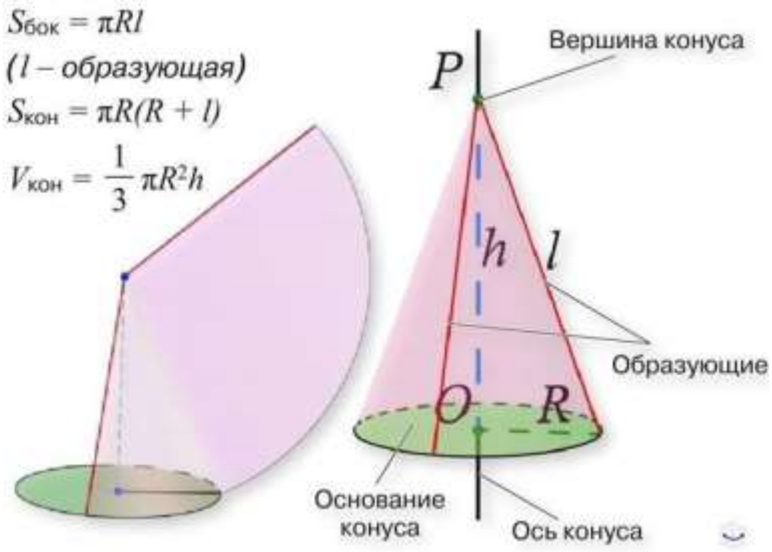
Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Найдите площадь полной поверхности, полученного вращением треугольника вокруг катета 4см.

Решение.

OB – радиус конуса($R = 3$ см), OS – высота конуса (H = 4см)

$$S_{\text{боковой поверхности}} = \pi R\ell = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi.$$

Ответ: 24π см^2.



Вариант 1

1. Цилиндр **нельзя** получить вращением…

1) треугольника вокруг одной из сторон;

2) квадрата вокруг одной из сторон;

3) прямоугольника вокруг одной из сторон.

2. Площадь боковой поверхности цилиндра **можно** вычислить по формуле…

1) $S_{бок} = 2\pi RH$;

2) $S_{бок} = \pi R^2 H$;

3) $S_{бок} = \pi RH$.

3. Сечением цилиндра плоскостью, перпендикулярной его образующей, **является**…

1) круг;

2) прямоугольник;

3) трапеция.

4. На основаниях цилиндра взяты две параллельные друг другу хорды, проходящие через центры оснований. Тогда расстояние между хордами…

1) равно высоте цилиндра;

2) больше высоты цилиндра;

3) меньше высоты цилиндра.

5. Боковой поверхностью цилиндра высотой H и диаметром основания d является квадрат. Тогда верно, что…

1) $d = H$;

2) $H = \pi d$;

3) $\pi H = d$.

6. Развёрткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра **<u>может</u>** быть…

1) прямоугольник;

2) ромб;

3) параллелограмм.

7. Отношение площадей боковой поверхности и осевого сечения цилиндра равно…

1) πR;

2) 2π;

3) π.

8. Площадь боковой поверхности цилиндра в 2 раза больше площади основания. Тогда отношение $\frac{H}{R}$ равно…

1) 1;

2) 2;

3) 3.

Вариант 2

1. Цилиндр **<u>можно</u>** получить вращением…

1) трапеции вокруг одного из оснований;

2) ромба вокруг одной из диагоналей;

3) прямоугольника вокруг одной из сторон.

2. Площадь боковой поверхности цилиндра **<u>нельзя</u>** вычислить по формуле…

1) $S_{бок} = \pi d H$

2) $S_{\text{бок}} = 2\pi RH;$

3) $S_{\text{бок}} = 2\pi R^2 H.$

3. Сечением цилиндра плоскостью, параллельной его образующей, **является**…

1) круг;

2) прямоугольник;

3) трапеция.

4. На основаниях цилиндра взяты две перпендикулярные друг другу хорды, проходящие через центры оснований.

Тогда расстояние между хордами…

1) равно образующей цилиндра;

2) больше высоты цилиндра;

3) меньше образующей цилиндра.

5. Боковой поверхностью цилиндра с высотой H и радиусом основания R является квадрат. Тогда **верно**, что…

1) $\frac{H}{R} = 2\pi;$

2) $\frac{R}{H} = 2\pi;$

3) $H = 2R.$

6. Развёрткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра **не может** быть…

1) прямоугольник;

2) ромб;

3) квадрат.

7. Площадь боковой поверхности цилиндра больше площади осевого сечения цилиндра в…

1) $\frac{1}{\pi}$ раз;

2) 2 раза;

3) π раз.

8. Площадь боковой поверхности цилиндра в 3 раза больше площади основания. Тогда отношение $\frac{H}{R}$ равно…

1) 1; 2) 1,5; 3) 3.

Вариант 3

1. Конус **<u>может</u>** быть получен вращением…

1) равностороннего треугольника вокруг его стороны;

2) прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов;

3) прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы.

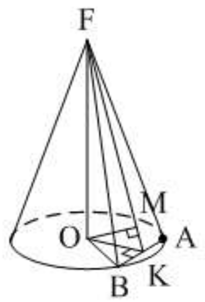
2. Площадь боковой поверхности конуса можно вычислить по формуле…

1) $S_{\text{бок}} = \pi Rl$; 2) $S_{\text{бок}} = \pi RH$; 3) $S_{\text{бок}} = \pi lH$.

3. Сечением конуса плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, **<u>является…</u>**

1) треугольник; 2) прямоугольник; 3) круг.

4. Расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, проходящей через вершину конуса, **<u>равно</u>** длине отрезка…



1) OB; 2) OK; 3) OM.

5. Развёрткой боковой поверхности конуса **<u>является</u>** круговой…

1) сегмент; 2) сектор; 3) слой.

6. Площадь полной поверхности конуса **<u>равна</u>**…

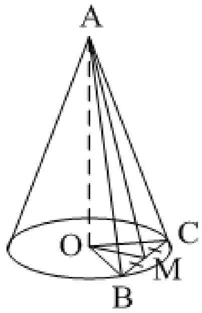
1) $S_{\text{пол}} = 2\pi Rl$; 2) $S_{\text{пол}} = \pi H(l+R)$; 3) $S_{\text{пол}} = \pi R(l+R)$.

7. Наибольший периметр имеет сечение конуса, проходящее через его вершину и хорду, стягивающую дугу в…

1) 60°; 2) 90°; 3) 180°.

8. Через вершину конуса и хорду BC проведена плоскость.

Тогда угол между этой плоскостью и плоскостью основания это угол…



1) ABO; 2) AMO; 3) BAC.

Вариант 4

1. Конус **<u>может</u>** быть получен вращением…

1) прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы;

2) равнобедренного треугольника вокруг медианы, проведённой к основанию;

3) тупоугольного треугольника вокруг одной из его сторон.

2. Площадь боковой поверхности конуса **<u>нельзя</u>** вычислить по формуле…

1) $S_{бок} = \pi R^2$; 2) $S_{бок} = \pi Rl$; 3) $S_{бок} = \pi \frac{d}{2} l$ $S_{бок} = \pi RH$.

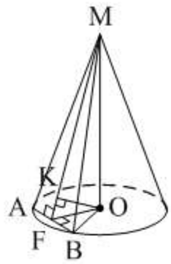
3. Сечением конуса плоскостью, проходящей вершину конуса и хорду основания, **<u>не может</u>** быть…

1) прямоугольный треугольник;

2) равнобедренный треугольник;

3) разносторонний треугольник.

4. Расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, проходящей через вершину конуса, **<u>равно</u>** длине отрезка…



1) OF; 2) OK; 3) OB.

5. a – образующая конуса, b – высота конуса.

Тогда **верно**, что…

1) $a > b$; 2) $a = b$; 3) $a < b$.

6. Площадь полной поверхности конуса, у которого осевым сечением является равносторонний треугольник со стороной a, **равна**…

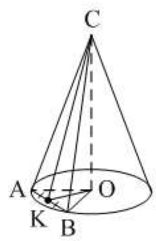
1) $S_{\text{пол}} = \frac{3}{4}\pi a^2$; 2) $S_{\text{пол}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 3) $S_{\text{пол}} = 3\pi a^2$.

7. Наибольшую площадь имеет сечение конуса, проходящее через его вершину и хорду, стягивающую дугу в…

1) 60°; 2) 90°; 3) 180°.

8. Через вершину конуса и хорду AB проведена плоскость.

Тогда угол между этой плоскостью и плоскостью основания – это угол…



1) ACB; 2) OAC; 3) CKO.

Критерии оценивания работы:

1. Отметка "5" выставляется, если правильно выполнено 8 заданий
2. Отметка "4" выставляется, если правильно выполнено 6-7 заданий
3. Отметка "3" выставляется, если правильно выполнено 4-5 заданий

4. Отметка "2" выставляется, если правильно выполнено менее 4заданий

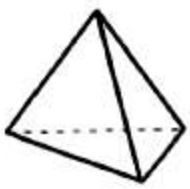
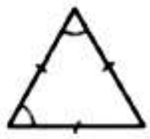
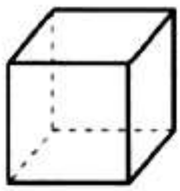
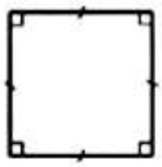
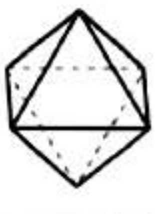
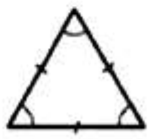
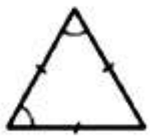
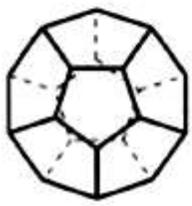
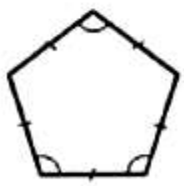
Ключи к правильным ответам:

№ п/п вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	1	1	2	1	3	1
2	3	3	2	1	1	2	3	2
3	2	1	3	3	2	3	3	2
4	2	1	3	2	1	1	3	3

Практическая работа №29 Тренажеры по теме: Правильные многогранники

Многогранник называется правильным, если:

1. он выпуклый
2. все его грани являются правильными многоугольниками
3. в каждой его вершине сходится одинаковое число его ребер

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ				
Тип правильного многогранника	**Вид грани**	**Число граней**	**Число вершин**	**Число ребер**
Правильный тетраэдр (четырехгранник) 		**4**	**4**	**6**
Гексаэдр (шестигранник), куб 		**6**	**8**	**12**
Октаэдр (восьмигранник) 		**8**	**6**	**12**
Икосаэдр (двадцатигранник) 		**20**	**12**	**30**
Додекаэдр (двенадцатигранник) 		**12**	**20**	**30**

Вариант 1

1. *ABCD* – тетраэдр. Тогда **<u>не являются</u>** противоположными рёбра…

1) *AD* и *BC*;

2) *AC* и *DC*;

3) *AB* и *DC*.

2. 12 – это число…

1) вершин параллелепипеда;

2) рёбер параллелепипеда;

3) граней параллелепипеда.

3. Какое предложение **<u>неверное</u>**?

1) Противоположные рёбра параллелепипеда параллельны и равны.

2) Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

3) Диагонали параллелепипеда равны.

4. Диагональным сечением параллелепипеда **<u>не может</u>** быть…

1) прямоугольник;

2) ромб;

3) трапеция.

5. **<u>Не существует</u>** тетраэдра, у которого…

1) все грани равные равносторонние треугольники;

2) все грани прямоугольные треугольники;

3) сумма градусных мер углов при одной вершине 360°.

6. **<u>Существует</u>** параллелепипед, у которого…

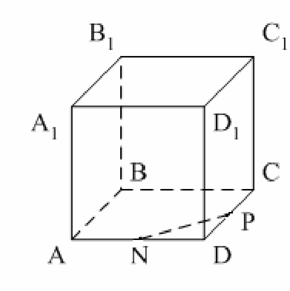
1) все углы граней острые;

2) все углы граней прямые;

3) число всех острых углов граней не равно числу всех тупых углов граней.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Точки *N* и *P* – середины рёбер *AD* и *CD* соответственно, $NP \in \alpha.$

Сечением параллелепипеда плоскостью α является треугольник. Тогда плоскость α пересекает ребро…



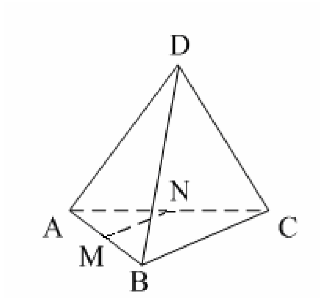
1) BB_1;

2) DD_1;

3) A_1B_1.

8. *DABC* – тетраэдр. Точки *M* и *N* – середины рёбер основания *AB* и *AC* соответственно, $MN \in \alpha$.

Сечение тетраэдра плоскостью α является четырёхугольник. Тогда плоскость α параллельна…



1) ребру *AD*;

2) ребру *BD*;

3) грани *BCD*.

Вариант №2

1. *ABCD* – тетраэдр. Тогда противоположными **являются** рёбра…

1) *AC* и *BC*;

2) *AB* и *DC*;

3) *DB* и *DC*.

2. 6 – это число…

1) вершин тетраэдра;

2) граней тетраэдра;

3) рёбер тетраэдра.

3. Какое предложение **неверное**?

1) Диагональным сечением параллелепипеда называется сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагонали.

2) Диагональным сечением параллелепипеда является параллелограмм.

3) Диагональные сечения параллелепипеда – равные параллелограммы.

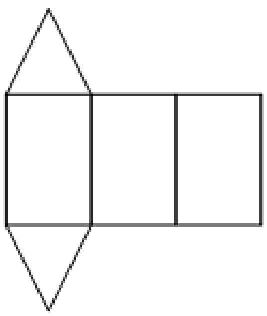
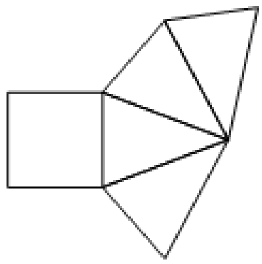
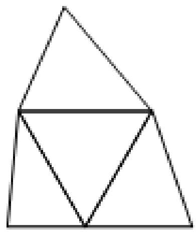
4. **Существует** параллелепипед, у которого…

1) только одна грань – прямоугольник;

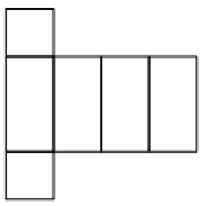
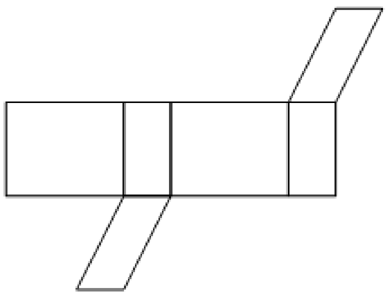
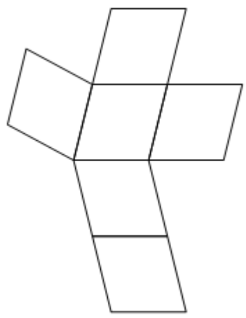
2) только две смежные грани – ромбы;

3) только две противоположные грани – ромбы.

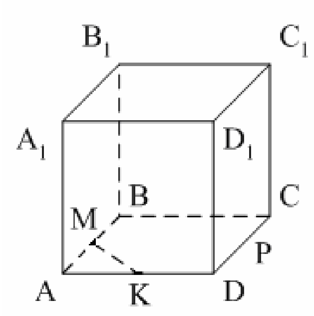
5. Развёрткой тетраэдра **является** фигура под номером…

1)

2)

3)


6. **Не является** развёрткой параллелепипеда фигур под номером…

1)

2)

3)


7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Точки M и K – середины рёбер AB и AD соответственно, $MK \in \alpha.$ Сечением параллелепипеда плоскостью α является четырёхугольник. Тогда плоскость α **<u>не пересекает</u>** ребро…



1) CC_1;

2) DD_1;

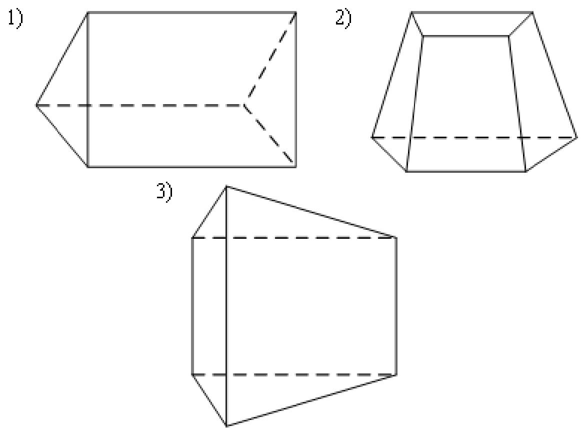
3) A_1B_1

8. $DABC$ – тетраэдр. Точки M и N – середины основания AB и BC соответственно, $MN \in \alpha.$ Сечением тетраэдра плоскостью α является треугольник. Тогда плоскость α **<u>не может</u>** быть параллельна…

1) ребру BD; 2) грани ADC; 3) высоте тетраэдра.

Вариант 3

1. Призма изображена на рисунке…



2. 6 – это число…

1) вершин шестиугольной призмы;

2) рёбер треугольной призмы;

3) граней четырёхугольной призмы.

3. **Не существует** призмы, у которой все грани…

1) ромбы;

2) прямоугольники;

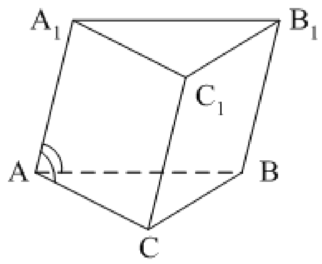
3) треугольники.

4. **Существует** призма, которая имеет…

1) 13 рёбер; 2) 14 рёбер; 3) 15 рёбер.

5. $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма. $\angle A_1AC = \angle A_1AB.$

Тогда CC_1B_1B **не может** быть…



1) ромбом;

2) квадратом;

3) прямоугольником.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед. $\angle B_1DM$ – угол между диагональю DB_1 и плоскостью DD_1C_1.

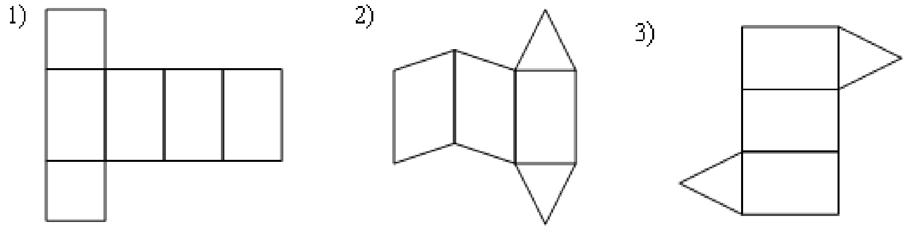
Тогда $ABCD$ –

1) ромб;

2) квадрат;

3) прямоугольник.

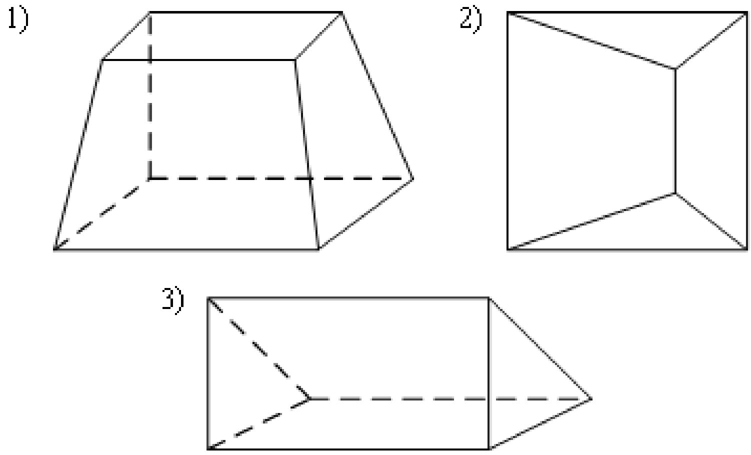
7. Развёрткой **наклонной** призмы является фигура под номером…



8. Призма имеет 30 граней. Сколько вершин и ребер:
   1) 56 и 84;
   2) 58 и 86;
   3) 60 и 88.

Вариант 4

1. Призма изображена на рисунке…



2. 9 – это число…

1) вершин девятиугольной призмы;

2) рёбер треугольной призмы;

3) граней четырёхугольной призмы.

3. **Не существует** призмы, у которой все грани…

1) ромбы;

2) квадраты;

3) трапеции.

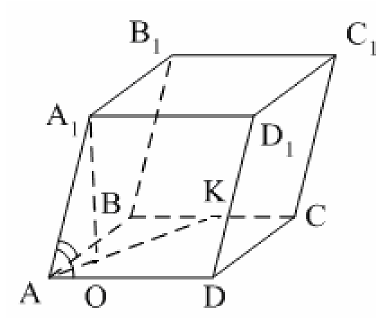
4. Число рёбер призмы **кратно**… 1) 5; 2) 2; 3) 3

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонный параллелепипед. $\angle A_1AD = \angle A_1AB.$ $A_1O \perp (ABC).$ $O \in$ биссектрисе AK. Тогда $ABCD$…

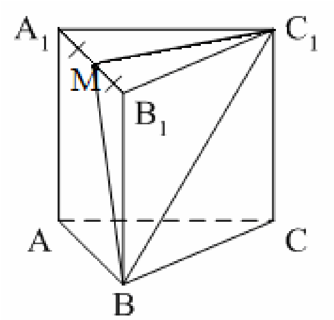
1) прямоугольник;

2) ромб:

3) квадрат.



6. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. Тогда угол между BC_1 и плоскостью ABB_1 – это…

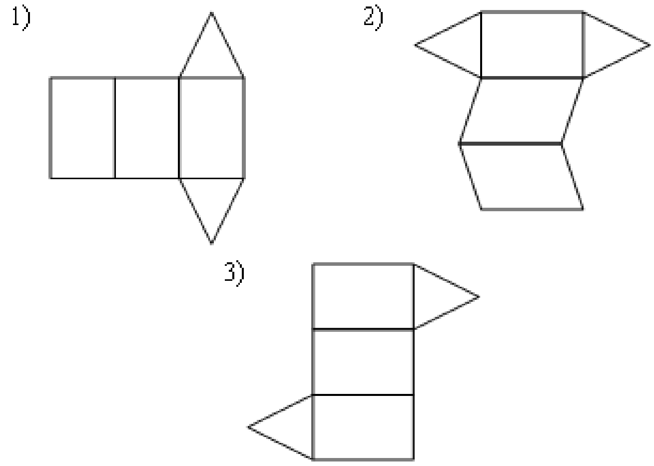


1) $\angle B_1BC_1$;

2) $\angle MBC_1$;

3) $\angle BC_1A_1$.

7. **<u>Не является</u>** развёрткой правильной призмы фигура под номером…



8.Призма имеет 40 граней. Сколько вершин и ребер:

1) 80 и 118

2) 76 и 114

3) 40 и 78.

Критерии оценивания работы:

1. Отметка "5" выставляется, если правильно выполнено 8 заданий
2. Отметка "4" выставляется, если правильно выполнено 6-7 заданий
3. Отметка "3" выставляется, если правильно выполнено 4-5 заданий
4. Отметка "2" выставляется, если правильно выполнено менее 4заданий

Ключи к правильным ответам:

№ п/п вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	2	2	3	3	2	2	2	1
2	2	3	3	3	3	3	1	1
3	1	3	3	3	1	1	2	1
4	3	2	3	3	1	2	2	2

Практическая работа №30 по теме: Формулы дифференцирования

Формулы дифференцирования

$$C' = 0$$
$$(kx)' = k$$
$$(x^r)' = rx^{r-1}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x\sqrt{x})' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = ku'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

03.10.2015 3

1 вариант

Используя формулы дифференцирования найдите производную функций в точке x_0:

а) $f(x) = x^3, \quad x_0 = 2; -1{,}5;$

б) $f(x) = 4 - 2x, \quad x_0 = 0{,}5; -3;$

в) $f(x) = 3x - 2, \quad x_0 = 5; -2;$

г) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 2{,}5; -1.$

2 вариант

Используя формулы дифференцирования найдите производную функций в точке x_0:

а) $f(x) = x^4, \quad x_0 = 2; -1{,}5;$

б) $f(x) = 2 - 4x, \quad x_0 = 0{,}5; -3;$

в) $f(x) = 2x + 3, \quad x_0 = 5; -2;$

г) $f(x) = x^3, \quad x_0 = 2{,}5; -1.$

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания

«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №31 Тренажеры по теме: Производные элементарных функций

Формулы дифференцирования

$$C' = 0$$

$$(kx)' = k$$

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x\sqrt{x})' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

03.10.2015 3

1 вариант

Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

1) $y = x^9$;
2) $y = x^{-13}$;
3) $y = \frac{1}{x^4}$;
4) $y = 4x + 16$;
5) $y = 32 - 9x$;
6) $y = -\frac{x}{7} - 41$.
7) $y = x^{-21}$;
8) $y = x^6$;
9) $y = -8x + 11$;
10) $y = \frac{1}{x^{-5}}$;
11) $y = 43 - 5x$;
12) $y = 31 - \frac{x}{12}$.

2 вариант

Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

1) $y = x^{24}$;

2) $y = x^{-21}$;

3) $y = \frac{1}{x^8}$;

4) $y = 11x - 9$;

5) $y = -51 - 6x$;

6) $y = -\frac{x}{13} + 5.$

7) $y = x^{-31}$;

8) $y = x^{16}$;

9) $y = -14x - 32$;

10) $y = -19 + 7x$;

11) $y = \frac{1}{x^{-8}}$;

12) $y = -28 - \frac{x}{18}.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Правильно выполнены любые 11-12 заданий
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 8-10 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 5-7 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 5 заданий

Практическая работа №32 Тренажеры по теме: Применение производной к исследованию функций

Определение: Точка x_0 называется точкой максимума, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) > f(x)$.
Определение: Точка x_0 называется точкой минимума, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) < f(x)$.
Точки минимума и максимума функции называются **точками экстремума функции**.
Точки, в которых производная равна нулю или не существует называются **критическими точками**.
Справедлива теоремы.
Теорема: Если x_0 – точка экстремума, то производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x) = 0$.
Теорема:
Если в окрестности критической точки $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.
Правило нахождения экстремумов функции y = f(x) с помощью производной

1. Найти производную функции $f'(x)$.
2. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует.
3. Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции f(x).

Если на промежутке $f'(x) < 0$, то на этом промежутке функция убывает; если на промежутке $f'(x) > 0$, то на этом промежутке функция возрастает.

4. Если в окрестности критической точки f ’(x) меняет знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.
5. Определить точки минимума и максимума и записать ответ.
   С помощью приведенного алгоритма можно найти не только экстремумы функции, но и промежутки возрастания и убывания функции.
   ПРИМЕР:
   Найти промежутки возрастания и убывания; точки экстремума функции: $f(x) = x^3 - 3x^2$.
   Решение:
   Найдем производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
   Найдем критические точки , решив уравнение $3x^2 - 6x = 0$;
   $3x(x-2) = 0$
   $x = 0$, $x = 2$
   Исследуем поведение производной в критических точках и на промежутках между ними.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	т. max 0	↘	т. min -4	↗

Ответ: Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

функция убывает при $x \in (0; 2)$

точка минимума функции x = 2; точка максимума функции x = 0.

1. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке [a;b].

Запишем алгоритм, позволяющий находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1. Находим область определения функции и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок [a;b].
2. Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке [a;b]
3. Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок [a;b]. Для этого, находим производную функции, приравниваем ее к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни.
4. Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при x=a и x=b.
5. Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Разберем алгоритм при решении примера на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

на отрезке [1;4];

Решение.

Областью определения функции является все множество действительных чисел, за исключением нуля, то есть $D(y):\quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Оба отрезка попадают в область определения.

Находим производную функции по правилу дифференцирования дроби:

$$y' = \left(\frac{x^3+4}{x^2}\right)' = \frac{(x^3+4)' \cdot x^2 - (x^3+4)\cdot (x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3}$$

Очевидно, производная функции существует во всех точках отрезков [1;4] и [-4;-1].

Стационарные точки определим из уравнения $\frac{x^3-8}{x^3}=0$. Единственным действительным корнем является x=2. Эта стационарная точка попадает в отрезок [1;4].

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в стационарной точке, то есть при x=1, x=2 и x=4:

$$y(1) = \frac{1^3+4}{1^2} = 5$$

$$y(2) = \frac{2^3+4}{2^2} = 3$$

$$y(4) = \frac{4^3+4}{4^2} = 4\frac{1}{4}$$

Следовательно, наибольшее значение функции $\max\limits_{x\in[1;\,4]} y = y(1) = 5$, а наименьшее значение $\min\limits_{x\in[1;\,4]} y = y(2) = 3$

Применение производной к построению графиков функции

При исследовании свойств функции необходимо найти:

1) область ее определения;

2) производную;

3) стационарные точки;

4) промежутки возрастания и убывания;

5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Пример: Построить график функции

$y = x^2(x-2)^2$.

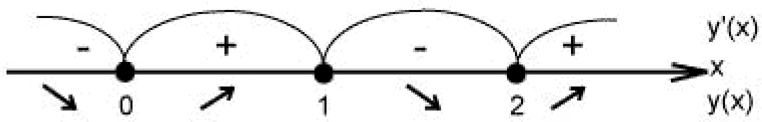
Решение.

1. Областью определения функции является **все действительные числа**

2. Найдём производную функции $y' = 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2) = 4x(x-2)(x-1)$

3. Найдём критические точки, в которых производная равна нулю. $y' = 0$
   Это точки x = 0, x = 2, x = 1

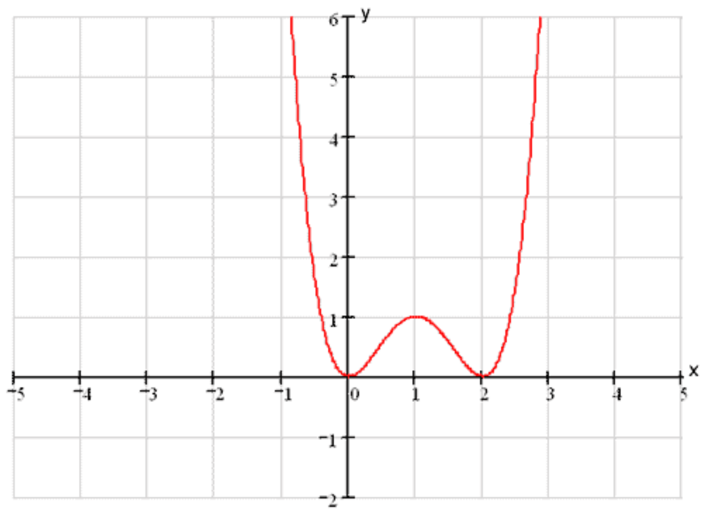
4) Отметим эти точки на числовой оси и определим знак производной на интервалах.



Таким образом: $x = 0$ - точка минимума; $x = 1$ - точка максимума; $x = 2$ - точка минимума.

$y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ y(2) = 0$.

5) Строим график на основании проделанного исследования

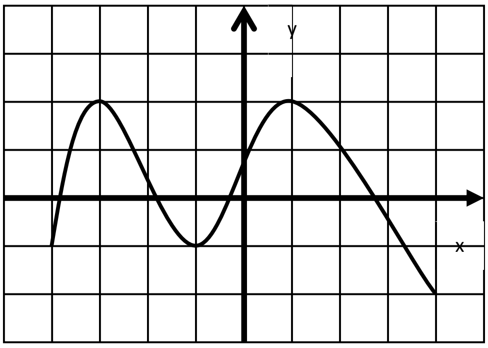


1 вариант

1.Определить промежутки возрастания и убывания функции y=f(x), используя данные о её производной $f'(x)$ (см. таблицу)

x	**(-∞; -8)**	**-8**	**(-8;0)**	**0**	**(0;8)**	**8**	**(8;∞)**
$f'(x)$	-	**0**	+	**0**	-	**0**	+

2. По графику функции найдите точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение функции.



3. Найти промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

$f(x) = x^3+x^2+16$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

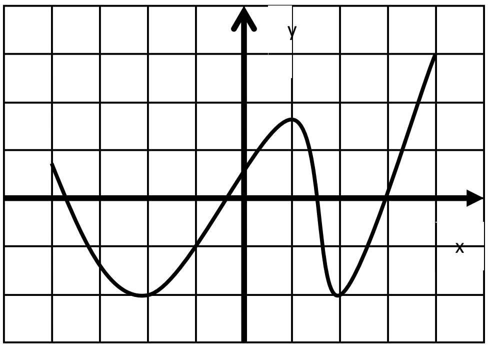
$f(x) = x^4-2x^2+3$ на отрезке [-4;3]

2 вариант

1. Укажите точки максимума и точки минимума функции y=f(x), если данные о её производной $f'(x)$ указаны в таблице:

x	**(-∞; -1)**	**-1**	**(-1;0)**	**0**	**(0;3)**	**3**	**(3;6)**	**6**	**(6;∞)**
$f'(x)$	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**

2. По графику функции найдите промежутки, при которых f'(x)>0. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.



3. Найти промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

$f(x) =x^3 +4x^2-37$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

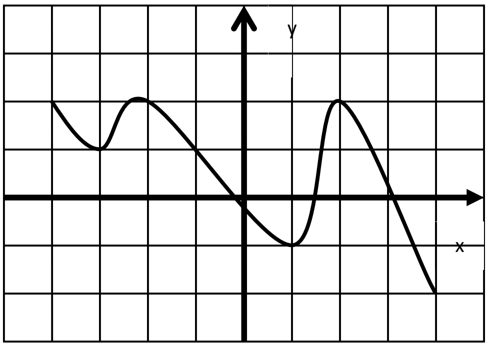
f(x) = x^4–8x^2 +5 на отрезке [-3;2]

3 вариант

1. Определить промежутки возрастания функции y=f(x), используя данные о её производной $f'(x)$ (см. таблицу)

x	**(-∞; 7)**	**7**	**(7;6)**	**6**	**(6;25)**	**25**	**(25;∞)**
$f'(x)$	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**

2. По графику функции найдите точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение функции.



3. Найти промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

f(x) = 2x^4–4x^2 +15

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

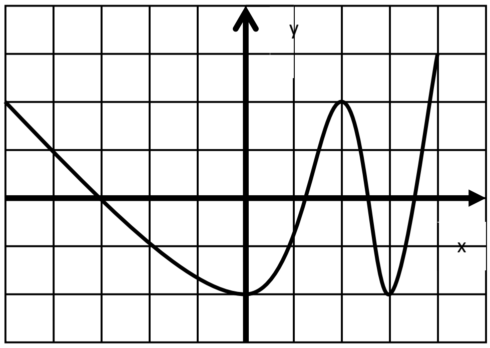
f(x) =x^3-6x^2+9 на отрезке [-2;2]

4 вариант

1. Укажите точки максимума и точки минимума функции y=f(x), если данные о её производной $f'(x)$ указаны в таблице:

x	**(-∞; -2,5)**	**-2,5**	**(-2,5;0)**	**0**	**(0;10)**	**10**	**(10;∞)**
$f'(x)$	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**

2. По графику функции найдите промежутки, при которых f'(x)<0. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.



3. Найти промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

$f(x) = x^4 – 8x^2$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на отрезке [-4;0]

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №33 Тренажеры по теме: Прикладные задачи

Задача о силе электрического тока.

Пусть q=q(t)-количество электричества (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника за время t; количество электричества есть функция времени. Для определения скорости изменения количества электричества с течением времени пользуются понятием силы тока. Обозначим Δq количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени Δt от момента t до момента t+Δt.

Отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется средней силой тока за время от t до t+Δt и обозначается $J_{ср}$. В случае постоянного тока $J_{ср}$ будет постоянной. Если в цепи переменный ток, то $J_{ср}$ будет различна для различных промежутков времени. Поэтому для цепи переменного тока вводят понятие силы тока J в данный момент времени t, определив ее как предел средней силы тока за промежуток времени от t до t+Δt, если Δt→0.

$$J = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}, \text{ т.е. } J(t) = q'(t).$$

Задача о скорости химической реакции.

Пусть дана функция m=m(t), где m - количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ -средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т.е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$ есть скорость химической реакции в данный момент времени t,V=m′(t).

Из рассмотренных выше задач, приводящих к понятию производной, следует несколько выводов:

1. Скорость прямолинейного движения есть производная пути S=S(t) по времени t, т.е. V=S′(аналогично ускорение есть производная скорости a=V′). В этом состоит механический смысл производной.
2. Скорость химической реакции есть производная количества веществаm=m(t) по времени t, т.е. V=m′(t).
3. Скорость роста популяции есть производная размера популяции p=p(t) по времени t, т.е. V=p′(t).
4. Скорость роста численности населения есть производная от количества населения A=A(t) по времени t, т.е. V=A′(t).
5. Сила переменного тока J есть производная количества электричества q=q(t) по времени t, т.е. J =q′(t).
6. Угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в точке с абсциссой x_0есть производная $f'(x_0)$. В этом состоит геометрический смысл производной.
7. Производительность труда f(t) есть производная от выработки продукцииF(t) по времени t, т.е. f(t)=F′(t).

<u>Примеры.</u>

I. Если популяция в момент времени t насчитывает $p(t)=3000+100t^2$ особей (tизмеряется в часах), то скорость роста популяции есть p′(t)=200t.

Скорость роста популяции увеличивается со временем.

Если t=5, то скорость роста составляет p′(5)=200·5=1000 особей в час.

Если t=10, то p′(10)=200·10=2000 особей в час.

II. Ракета при движении совершает колебательное движение вокруг своей оси по закону $\alpha(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$. Найти угловую скорость и ускорение движения в момент времени $t_0 = \frac{\pi}{2} c$. Дать характеристику движения.

Решение: $\omega(t) = \alpha'(t) = 12\cos\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$

$\omega(t_0) = 12\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 12\sin\frac{\pi}{6} = 6$ (рад/с)

ε $(t) = \omega'(t) = -36\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3t\right)$

ε $(t_0) = -36\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 36\cos\frac{\pi}{6} = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ (рад/с^2)

$\omega(t) \neq const, \varepsilon(t) \neq const$ неравномерное движение

Ответ: $\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$=6 рад/с, $\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right)$=18$\sqrt{3}$ рад/с^2.

III. Пуля, попадая в твердое тело, движется в нем по закону S(t)=$\frac{1}{k}$ ln(1+kV_0t), где V_0 - скорость, с которой пуля входит в тело, k – постоянная положительная величина.
Решение: V(t)=S′(t)

V(t)=$\left(\frac{1}{k}\ln(1+kV_0t)\right)' = \frac{kV_0}{k(1+kV_0t)} = \frac{V_0}{1+kV_0t}$

$$a(t) = V'(t), a(t) = \left(\frac{V_0}{1+kV_0t}\right)' = -\frac{kV_0 \cdot V_0}{(1+kV_0t)^2} = -k\cdot\left(\frac{V_0}{1+kV_0t}\right)^2 = -k\cdot V^2$$

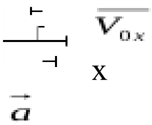
Ответ: *V*=$\frac{V_0}{1+kV_0t}$; *a*=-k·V^2.

IV. Материальная точка движется вдоль оси OX согласно закону x(t). Найти скорость и ускорение движения в начальный момент времени. Описать характер движения и схематически изобразить движение материальной точки, если:

а). x(t)=$\frac{3}{4} - 8t + \frac{5}{6}t^2$

$V(t) = x'(t) = -8 + \frac{5}{3}t; V(0) = -8$ (м/с)

$a(t) = V'(t) = \frac{5}{3}$ $a = \frac{5}{3}$ (м/с^2)

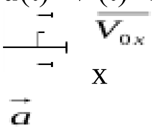


Равнозамедленное движение в сторону, противоположную оси OX.

б). $x(t) = \sqrt{3} + 5t + \frac{1}{2}t^2$

V(t)=x′(t)=5+t; V(0) 5 (м/с)

a(t)=V′(t)=1; *a*=1 (м/с^2)

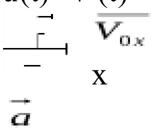


Равноускоренное движение в сторону оси OX.

в). x(t)=-$\frac{3}{4}t^2 + \frac{7}{2}t - 2\sqrt{5}$;

V(t)=x′(t)=-$\frac{3}{2}t + \frac{7}{2}t$; V(0)= $\frac{7}{2}$ =3,5 (м/с)

a(t)=V′(t)=-1,5; *a*=-1,5 (м/с^2)



Равнозамедленное движение в сторону оси OX.

V. Материальная точка движется по прямой. Уравнение движения: S(t)= $t^3-3\frac{t^2}{2}+2t-1$ (м). Найдите ее скорость в момент времени t=3 (с). В какой момент времени ускорение будет равно 9 м/с^2?

Решение: а). V(t)=S′(t)=3t^2-3t+2;

V(3)=27-9+2=20 (м/с).

б). a(t)=V′(t)=6t-3;

6t-3=9; 6t=12; t=2 (с).

Ответ: V(3)=20 м/с; a=9 м/с^2 в момент времени t=2с.

VI. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону φ(t). Найти угловую скорость и угловое ускорение движения. Дать характеристику движения, если:

A

$\vec{E}$ $\overrightarrow{\omega_a}$

O $\vec{y}$

B

$\overrightarrow{\omega_b}$

а) φ(t)=12t+4

$\omega(t)=\varphi'(t)=12(рад/с)$

E(t)=$\omega'(t)=0$

$\omega=const$

E=0 Равномерное движение по окружности.

б). φ(t)=5t^3+6t

$\omega(t)=\varphi'(t)=15t^2+6$

E(t)=$\omega'(t)=30t$

$\omega\neq const$

$\varepsilon=const$ Неравномерное движение по окружности.

в). φ(t)=2t^2+8t

$\omega(t)=\varphi'(t)=4t+8$

E(t)=$\omega'(t)=4$

$\omega\neq const$

$\varepsilon\neq const$ Равнопеременное движение по окружности.

VII. Тело массой 5 кг движется прямолинейно по закону S(t)=(5-t)(2t-6)+50. Найти кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

Решение: $E_к$= $\frac{mv^2}{2}$

V(t)=S′(t)=-(2t-6)+2(5-t)=-2t+6+10-2t=-4t+16

V(t_0)=-4·2+16=-8+16=8 (м/с)

$E_к$= $\frac{5\cdot 64}{2}=5\cdot 32=160$ (Дж)

Ответ: $E_к$=160Дж.

VIII. Материальная точка массой 10 кг движется прямолинейно по законуS(t)= $2t^3-\frac{5t^2}{2}-7t+3$. Найти скорость и силу, действующую на эту точку в момент времени t=1с.

Решение: F=ma

$V(t)=S'(t)=6t^2-5t-7$
$V(t_0)=6-5-7=-6$ (м/с)
$a(t)=12t-5$; $a(t_0)=12-5=7$ (м/с^2)
$F=10\cdot 7=70$ (Н)
Ответ: F=70 Н.

IX. Температура тела изменяется в зависимости от времени по закону $T=100-\frac{4}{t+1}$.
а). Какова скорость изменения температуры тела в момент времени t=1c?
б). В какой момент времени скорость изменения температуры равна 4^0 в секунду?

Решение: а) $T'=\frac{4}{(t+1)^2}; T'(1)=\frac{4}{(1+1)^2}=\frac{4}{4}=1^0$ (в сек)

б) $\frac{4}{(t+1)^2}=4;$ $(t+1)^2=16$; $t+1=4$; $t=3$ (с)
Ответ: а) скорость изменения температуры 1^0 в сек.
б) скорость изменения температуры 4^0 в сек достигается в момент времени 3с.

1 вариант

1. Материальная точка движется по прямой согласно закону $s(t)=12t^2-\frac{2}{3}t^3$, где $s(t)$ - путь в метрах и t – время в секундах. В какой момент времени из промежутка [4;10] скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой скорости?
2. Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.
3. Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать13,5 л жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?

2 вариант

1. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, изменяется по закону $v(t)=\frac{1}{6}t^3-12t$ (скорость измеряется в метрах в секунду). В какой момент времени ускорение движения будет наименьшим, если движение рассматривать за промежуток от 10 с до 50 с?
2. Число 4 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.
3. Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 2 задания

«Удовлетворительно»	Правильно выполнено 1 любое задание
«Неудовлетворительно»	Не выполнено ни одно задание

Практическая работа №34 Тренажеры по теме: Первообразная

Первообразная

- Функция F(x) называется **первообразной** для функции f(x) на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка F'(x) = f(x).

- Пример:
  Первообразной для функции f(x)=x на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция f(x)	Первообразная F(x)
k	$kx+c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x+c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x+c$
e^x	e^x+c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$

1 вариант

1. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке:
   а) $F(x) = x^5, \quad f(x) = 5x^4, \quad x \in (-\infty;+\infty)$;
   б) $F(x) = -\dfrac{1}{6}x^{-6}, \quad f(x) = x^{-7}, \quad x \in (0;+\infty)$;
   в) $F(x) = 5 - x^4, \quad f(x) = 4x^3, \quad x \in (-\infty;+\infty)$;
   г) $F(x) = \cos x - 4, \quad f(x) = -\sin x, \quad x \in (-\infty;+\infty)$.
2. Найдите общий вид первообразных для функций:
   а) $f(x) = 2 - x^4$;
   б) $f(x) = x + \cos x$;
   в) $f(x) = 2 - x^3 + \dfrac{2}{x^3}$;
   г) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\cos^2 x} + 2x$.

1 вариант

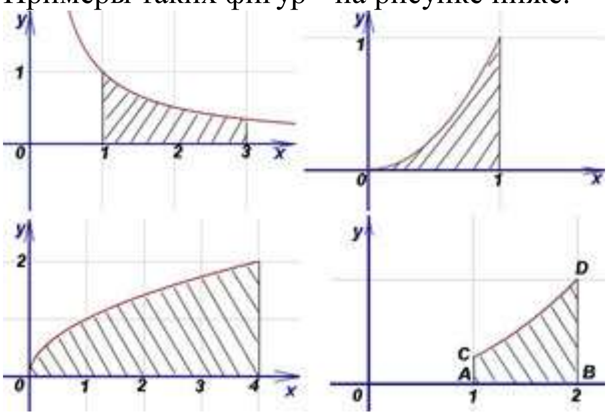
1. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке:
   а) $F(x) = x^{-3}, \quad f(x) = -3x^{-4}, \quad x \in (0;+\infty)$;
   б) $F(x) = \dfrac{1}{7}x^7, \quad f(x) = x^6, \quad x \in (-\infty;+\infty)$;
   в) $F(x) = 3 - \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad x \in (-\infty;+\infty)$;
   г) $F(x) = x^{-2} + 2, \quad f(x) = \dfrac{1}{2x^3}, \quad x \in (0;+\infty)$.
2. Найдите общий вид первообразных для функций:
   а) $f(x) = x^5 + 3$;
   б) $f(x) = \sin x - 4$;
   в) $f(x) = 4 + x^4 - \dfrac{3}{x^5}$;
   г) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sin^2 x} + 4x.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 6-7 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 4-5 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 4 заданий

Практическая работа №35 Тренажеры по теме: Площади плоских фигур

Вычислять **площади плоских фигур**, которые ограничены осью абсцисс (*Ox*), отрезками прямых *x* = *a*, *x* = *b* и графиком непрерывной и неотрицательной функции *y* = *f*(*x*) для значений "икса", принадлежащих отрезку [*a*, *b*]. Такая фигура называется криволинейной трапецией. Боковые отрезки могут вырождаться в точки. Примеры таких фигур - на рисунке ниже.



Площадь *s* этой криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле

$$s = \int_a^b f(x)\ dx \qquad (1).$$

Итак, **определённый интеграл** от неотрицательной непрерывной функции *f*(*x*) по [*a*, *b*] (график функции расположен выше оси *Ox*) **численно равен площади криволинейной трапеции** с основанием [*a*, *b*], ограниченной сверху графиком функции *y* = *f*(*x*). В этом заключается геометрический смысл определённого интеграла. Рисунки таких фигур - в примерах.

Если же *f*(*x*) ≤ 0 (график функции расположен ниже оси *Ox*), то **площадь криволинейной трапеции** может быть вычислена по формуле

$$s = -\int_a^b f(x)\,dx \quad . (2)$$

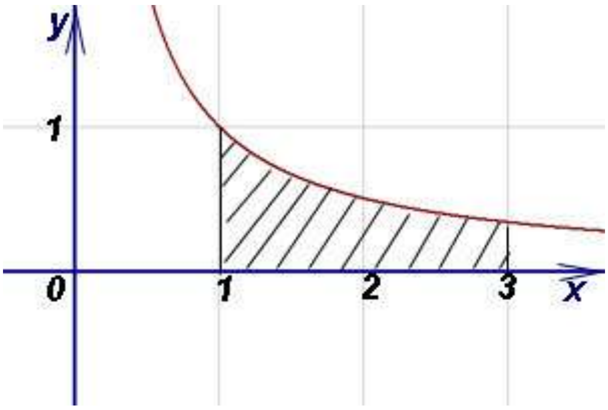
Есть ещё случаи, когда и верхняя, и нижняя границы фигуры - функции, соответственно *y* = *f*(*x*) и *y* = *φ*(*x*), то площадь такой фигуры вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\ dx \quad . (3)$$

Таким образом, **вычисление площадей плоских фигур** - одна из важнейших прикладных задач, в которой **определённый интеграл** находит наиболее плодотворное применение. Все мы изучали сведения из элементарной геометрии, которые позволяют вычислять площади прямолинейных фигур - прямоугольников, треугольников и многоугольников. Что же касается криволинейных фигур, то здесь для нахождения площади средств из элементарной геометрии уже недостаточно. Итак, к делу. Учимся применять то, что изложено в самом верху этой статьи.

Начнём со случаев, когда площадь фигуры может быть вычислена по формуле (1).

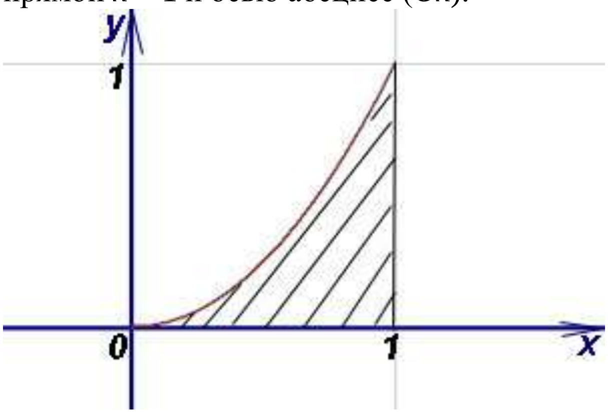
Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x}$, осью абсцисс (*Ox*) и прямыми *x* = 1, *x* = 3.



Решение. Так как $y = 1/x > 0$ на отрезке [1; 3], то площадь криволинейной трапеции находим по формуле (1):

$$s = \int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^3 = \ln 3 \approx 1,099 \ \text{(кв. ед.)}$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^\alpha, \ \alpha > 0,$, прямой $x = 1$ и осью абсцисс (Ox).

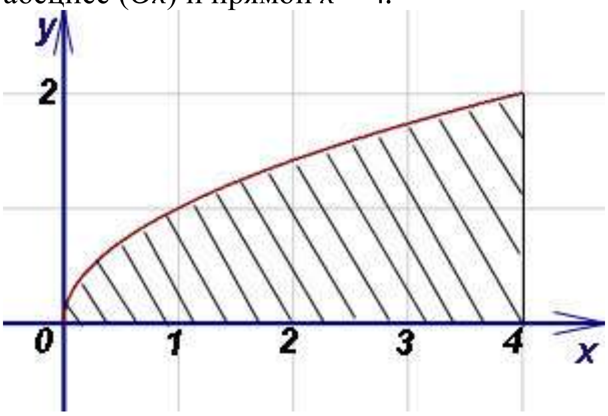


Решение. Результат применения формулы (1):

$$s = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Если $\alpha = 1,$ то $s = 1/2$; если $\alpha = 2,$ то $s = 1/3$, и т.д.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью абсцисс (Ox) и прямой $x = 4$.



Решение. Фигура, соответствующая условию задачи - криволинейная трапеция, у которой левый отрезок выродился в точку. Пределами интегрирования служат 0 и 4.

Поскольку $\sqrt{x} \geq 0$, по формуле (1) находим площадь криволинейной трапеции:

$$s=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4=\frac{16}{3}\text{ кв.ед.}$$

1 вариант

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (предварительно сделав рисунок):

а) $y=x^2+2,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=3;$

б) $y=\cos x,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=\frac{\pi}{2};$

в) $y=x^3+1,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=2;$

г) $y=\frac{2}{\sqrt{x}};\quad y=0,\quad x=1,\quad x=4.$

2 вариант

а) $y=x^2+3,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=2;$

б) $y=\sin x,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=\pi;$

в) $y=2+x^3,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=3;$

г) $y=\frac{3}{\sqrt{x}};\quad y=0,\quad x=1,\quad x=9.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №36 Тренажеры по теме: Теорема Ньютона-Лейбница

Определение 1. Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(t)$ сверху, отрезком $[a, b]$ снизу, а справа и слева отрезками прямых $t = a$ и $t = b$ (рис. 2), называют ***криволинейной трапецией.***

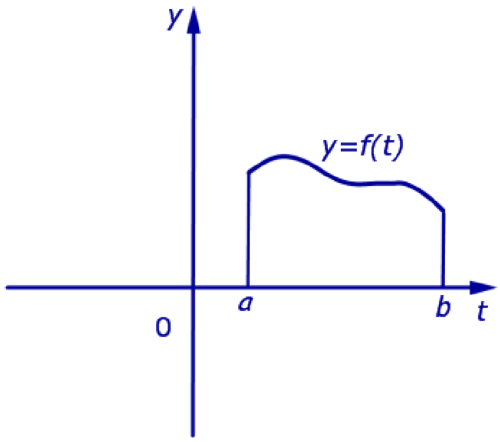


Рис.2

Определение 2. Число, равное площади криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 2, называют ***определенным интегралом*** от функции $f(t)$ в пределах от a до b и обозначают

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

Формула (1) **читается так**: «Интеграл от a до b от функции $f(t)$ по dt»

Определение 3. В формуле (1) функцию $f(t)$ называют ***подынтегральной функцией,*** переменную t называют ***переменной интегрирования,*** отрезок $[a, b]$ называют ***отрезком интегрирования,*** число b называют ***верхним пределом интегрирования,*** а число a – ***нижним пределом интегрирования.***

Производная от определенного интеграла по верхнему пределу

Если обозначить $S(x)$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной с боков отрезками прямых $t = a$ и $t = x$ (рис. 3),

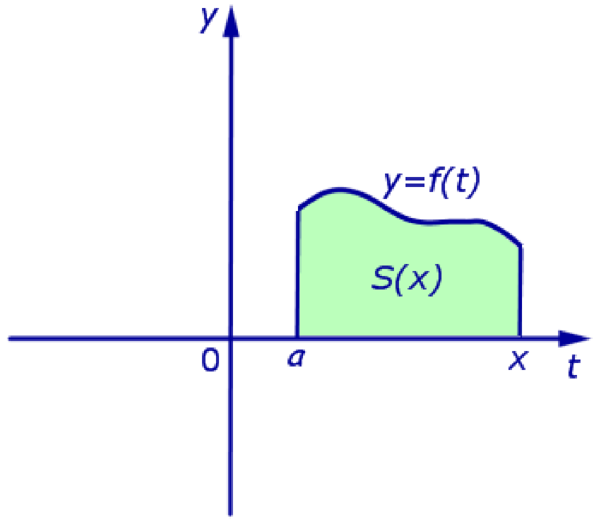


Рис.3

то будет справедлива формула

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Теорема 1. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу интегрирования равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе интегрирования.

Другими словами, справедлива формула

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Доказательство. Из формулы (2) следует, что

$$S(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt\,,$$

где через Δx обозначено приращение аргумента x (рис. 4)

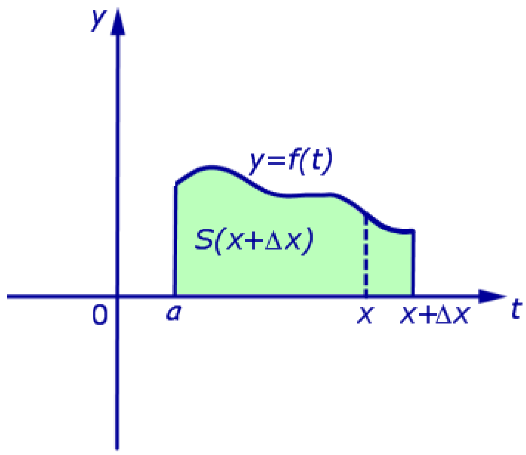


Рис.4

Из формул (3) и (2) получаем, что

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt\,,$$

1 вариант

Вычислите интеграл:

1) $\int_{-1}^{1} x^5 dx;$

2) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\ dx;$

3) $\int_{0}^{1} e^x dx;$

4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x};$

5) $\int_{0}^{1} (2x - 3x^2)\,dx$

2 вариант

Вычислите интеграл:

1) $\int_{-2}^{1} 4x^3 dx;$

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx;$

3) $\int_{0}^{1} 5^x dx;$

4) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 x};$

5) $\int_{-1}^{2} (3 - x^2) \, dx$

3 вариант

Вычислите интеграл:

1) $\int_{0}^{2} 2x^4 \, dx;$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx;$

3) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x};$

4) $\int_{-1}^{2} e^x dx;$

5) $\int_{0}^{1} (6x^2 - 2) dx$

4 вариант

Вычислите интеграл:

1) $\int_{-2}^{3} 2dx;$

2) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\, dx;$

3) $\int_{0}^{2} 7^{x} dx;$

4) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\, dx}{\cos^{2} x};$

5) $\int_{-1}^{1} (3x - 7x^{6})\, dx$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №37 Тренажеры по теме: Пространственные тела

Помимо **нахождения площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла** важнейшим приложением темы является **вычисление объема тела вращения**. Материал простой, но читатель должен быть подготовленным: необходимо уметь решать **неопределенные интегралы** средней сложности и применять **формулу Ньютона-Лейбница** в **определенном интеграле**. Как и для задачи нахождения площади, нужны уверенные навыки построения чертежей – это чуть ли не самое важное (поскольку интегралы сами по себе чаще будут лёгкими). Освоить грамотную и быструю технику построения графиков можно с помощью методических материалов **Графики и свойства Элементарных функций** и **Геометрические преобразования графиков**. Но, собственно, о важности чертежей я уже неоднократно говорил на уроке **Определенный интеграл. Как вычислить площадь фигуры**.

Вообще в интегральном исчислении очень много интересных приложений, с помощью определенного интеграла можно вычислить площадь фигуры, объем тела вращения, **длину дуги**, **площадь поверхности вращения** и многое другое. Поэтому будет весело, пожалуйста, настройтесь на оптимистичный лад!

Представьте некоторую плоскую фигуру на координатной плоскости. Представили? ... Интересно, кто что представил… =))) Её площадь мы уже находили. Но, кроме того, данную фигуру можно ещё и вращать, причем вращать двумя способами:

– вокруг оси абсцисс OX;
– вокруг оси ординат OY.

В данной статье будут разобраны оба случая. Особенно интересен второй способ вращения, он вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле решение практически такое же, как и в более распространенном вращении вокруг оси абсцисс. В качестве бонуса я вернусь к **задаче нахождения площади фигуры**, и расскажу вам, как находить площадь вторым способом – по оси OY. Даже не столько бонус, сколько материал удачно вписывается в тему.

Начнем с наиболее популярной разновидности вращения.

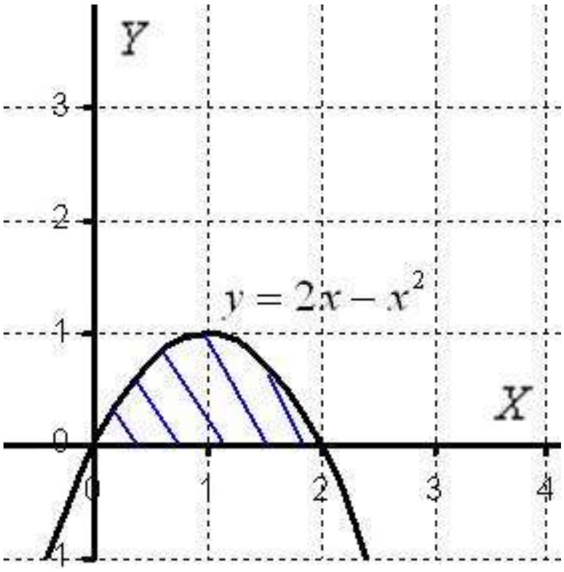
Вычисление объема тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси OX

Пример 1

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, при этом не забываем, что уравнение $y = 0$ задаёт ось OX. Как рациональнее и быстрее выполнить чертёж, можно узнать на страницах **Графики и свойства Элементарных функций** и **Определенный интеграл. Как вычислить площадь фигуры**. Это китайское напоминание, и на данном моменте я больше не останавливаюсь.

Чертёж здесь довольно прост:



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX. На самом деле у тела есть математическое название, но по справочнику что-то лень уточнять, поэтому едем дальше.

Как вычислить объем тела вращения?

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

В формуле перед интегралом обязательно присутствует число π. Так повелось – всё, что в жизни крутится, связано с этой константой.

Как расставить пределы интегрирования «а» и «бэ», думаю, легко догадаться из выполненного чертежа.

Функция $f(x)$ … что это за функция? Давайте посмотрим на чертеж. Плоская фигура ограничена графиком параболы $f(x) = 2x - x^2$ сверху. Это и есть та функция, которая подразумевается в формуле.

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – подынтегральная функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом **интеграл всегда неотрицателен**, что весьма логично.

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Как я уже отмечал, интеграл почти всегда получается простой, главное, быть внимательным.

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}$ $ед^3$. $\approx 3{,}35$ $ед^3$.

В ответе нужно обязательно указать размерность – кубические единицы $ед^3$. То есть, в нашем теле вращения примерно 3,35 «кубиков». Почему именно кубические *единицы*? Потому что наиболее универсальная формулировка. Могут быть кубические сантиметры, могут быть кубические метры, могут быть кубические километры и т.д., это уж, сколько зеленых человечков ваше воображение поместит в летающую тарелку.

1 вариант

1. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
   а) $y = x^2 + 1, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0;$
   б) $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0.$
2. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:
   а) $y = x^2, \quad y = x;$
   б) $y = 2x, \quad y = x + 3, \quad x = 0, \quad x = 1.$

2 вариант

1. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
   а) $y = 1 - x^2, \quad y = 0;$
   б) $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad y = 0.$
3. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:
   а) $y = \sqrt{x}, \quad y = x;$
   б) $y = 2 + x, \quad y = 1, \quad x = 0, \quad x = 2.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №38 Тренажеры по теме: Вероятность и ее свойства

Цель: освоить навыки решения задач по теории вероятностей.

Методические указания.

Случайным называют событие, которое может произойти или не произойти во время наблюдения или испытания. Пусть при проведения (бросание монеты или кубика, вытягивание экзаменационного билета и т.д.) возможны n равновозможных исходов. Например, при подбрасывании монеты число всех исходов n равно 2, так как кроме «решки» или «орла» других исходов быть не может. При броске игрального кубика возможны 6 исходов, так как на верхней грани кубика равновозможно появление любого числа от 1 до 6. Пусть также некоторому событию А благоприятствует m исходов.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов. Пишем

$P(A) = \frac{m}{n}$. Например, пусть событие А состоит в выпадении нечётного числа очков при бросании кубика. Всего возможны 6 исходов: выпадение на верхней грани кубика 1,2,3,4,5,6. При этом благоприятными для события А являются исходы с выпадением 1,3,5. Таким образом, $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство $0 \leq \mathrm{P} \leq 1.$ Если у вас в ответе вероятность получается больше 1, значит, вы где-то ошиблись и решение нужно перепроверить.

1 вариант

Решите задачи, пользуясь классическим определением вероятности:

1. В урне 20 белых и 25 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найдите вероятность того, что этот шар – белый.
2. Задумано двузначное число. Найдите вероятность того, что задуманным числом окажется:
   а) случайно названное двузначное число;
   б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.
3. В первом ящике лежит 20 деталей, из них 13 стандартных; во втором – 30 деталей (26 стандартных); в третьем – 10 деталей (7 стандартных). Найдите вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

2 вариант

Решите задачи, пользуясь классическим определением вероятности:

1. В урне 10 белых шаров, 26 черных, 15 синих и 14 красных. Из урны вынимают наугад один шар. Найдите вероятность того, что этот шар окажется цветным.
2. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность следующих событий:
   а) сумма выпавших очков равна 6;
   б) сумма выпавших очков равна 8, а разность 3.
3. В экзаменационный билет входит 4 вопроса программы, насчитывающей 45 вопросов. Абитуриент не знает ответа на 15 вопросов программы. Какова вероятность того, что он вытянет билет, где все вопросы ему известны?

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнено любое 1 задания
«Неудовлетворительно»	Не выполнено ни одного задания

Практическая работа №39 Тренажеры по теме: Повторные испытания

Что такое ***независимые испытания***? Практически всё понятно уже из самого названия. Пусть производится несколько испытаний. Если вероятность появления некоего события A в каждом из них **не зависит** от исходов остальных испытаний, то… заканчиваем фразу хором =) Молодцы. При этом под словосочетанием «независимые испытания» часто подразумевают ***повторные независимые испытания*** – когда они осуществляются друг за другом.

Простейшие примеры:

– монета подбрасывается 10 раз;

– игральная кость подбрасывается 20 раз.

Совершенно ясно, что вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании не зависит от результатов других бросков. Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для кубика.

А вот последовательное извлечение карт из колоды не является серией независимых испытаний – как вы помните, это цепочка **зависимых событий**. Однако если карту каждый раз возвращать обратно, то ситуация станет «такой, какой надо».

Спешу обрадовать – у нас в гостях очередной Терминатор, который абсолютно равнодушен к своим удачам/неудачам, и поэтому его стрельба представляет собой образец стабильности =):

Задача 1

Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна p. Найти вероятность того, что:

а) стрелок попадёт только один раз;

б) стрелок попадёт 2 раза.

Решение: условие сформулировано **в общем виде** и вероятность попадания в мишень при каждом выстреле считается известной. Она равна p *(если совсем тяжко, присвойте параметру какое-нибудь конкретное значение, например,* $p = 0{,}6$*).*

Коль скоро, мы знаем p, то легко найти вероятность промаха в каждом выстреле: $q = 1 - p$, то есть, «ку» – это тоже известная нам величина.

а) Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт только один раз»* и обозначим его вероятность через P_4^1 *(индексы понимаются как «одно попадание из четырёх»)*. Данное событие состоит в 4 несовместных исходах: стрелок попадёт в 1-й **или** во 2-й **или** в 3-й **или** в 4-й попытке.

По **теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий**:

$$P_4^1 = pqqq + qpqq + qqpq + qqqp$$

Внимание! *Если вам НЕ ПОНЯТНА эта запись, пожалуйста, вернитесь к предыдущему уроку по вышеприведённой ссылке!*

Упростим результат с помощью комбинаторной **формулы количества сочетаний**:
$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать попытку, в которой стрелок попал.
И, поскольку в каждом случае имеет место 1 попадание и 3 промаха, то:
$P_4^1 = C_4^1 pq^3 = 4pq^3$ – вероятность того, что стрелок попадёт только один раз из четырёх
…Как-то так «с лёгкой руки» я начал называть повторные независимые испытания «попытками», что не в каждой задаче может быть корректным… …ну да ладно.
б) Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт два раза»* и обозначим его вероятность через P_4^2 *(«два попадания из четырёх»)*. Здесь вариантов становится больше, попадания возможны:
в 1-й и 2-й попытках
или
в 1-й и 3-й попытках
или
в 1-й и 4-й попытках
или
во 2-й и 3-й попытках
или
во 2-й и 4-й попытках
или
в 3-й и 4-й попытках.
Таким образом, по тем же **теоремам сложения и умножения вероятностей**:
$P_4^2 = ppqq + pqpq + pqqp + qppq + qpqp + qqpp$
Можно ли так решать задачу? Безусловно, можно. Но что делать, если серия состоит из 5, 6 или бОльшего количества выстрелов? Тут уже будут получаться десятки слагаемых, запись которых отнимет много времени и места. В этой связи рациональнее придерживаться более компактной схемы:
$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами *(перечислены выше)* можно выбрать 2 попытки, в которых произойдут попадания.
И, поскольку в любом исходе ровно 2 попадания и 2 промаха, то:
$P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2 = 6p^2q^2$ – вероятность того, что стрелок попадёт 2 раза из 4.
Ответ: а) $4pq^3$, б) $6p^2q^2$

Итак – вероятность того, что будет 1 попадание из 4, равна $P_4^1 = C_4^1 pq^3$, вероятность того, что будет 2 попадания из 4, равна $P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2$… не замечаете ли вы закономерности?
Только что на конкретном примере мы повторили путь Якоба Бернулли, который несколько веков назад вывел формулу, названную позже в его честь:
– Вероятность P_n^m того, что **в n независимых испытаниях** некоторое случайное событие A наступит **ровно m раз**, равна:
$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где:
p – вероятность появления события A в каждом испытании;
$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом испытании.

Коэффициент C_n^m часто называют ***биномиальным коэффициентом***.
Примечание*: формула Бернулли справедлива только для тех независимых испытаний, в которых вероятность p события A сохраняется постоянной. Но на практике в*

результате испытаний могут появляться разные события с разными вероятностями – в этом случае работает другая формула. Соответствующие примеры можно найти, например, в типовых ***расчётах из сборника Чудесенко*** *(Задача 18).*
За примером далеко ходить не будем:
Задача 2
Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет 3 раза.
Решение: сначала немного порассуждаем: всего проводится 10 повторных независимых испытаний. Сколькими способами можно выбрать 3 испытания, в которых выпадет орёл?

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$$ способами!

Это что же получается – записывать 120 слагаемых, в каждом из которых 10 множителей? =)
Используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данном случае:
$n = 10$ – всего испытаний;
$m = 3$ – количество испытаний, в которых должен появиться орёл;
$p = \frac{1}{2}$ – вероятность появления орла в каждом испытании;
$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – вероятность появления решки в каждом испытании.
Таким образом:

$$P_{10}^3 = C_{10}^3 p^3 q^7 = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{1024} = 0{,}1171875$$ – вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет ровно 3 раза.

Ответ: $P_{10}^3 \approx 0{,}12$
Следует отметить, что *повторный характер* независимых испытаний не является «жизненно важным» (необходимым) условием для применения формулы Бернулли. Рассмотрим похожую задачу *(которая, кстати, эквивалентна Задаче 8 урока о* ***классическом определении вероятности****)*:
Найти вероятность того, что при броске 10 монет орёл выпадет на 3 монетах.
Здесь испытания не повторяются, а скорее, производятся одновременно, но, тем не менее, работает та же самая формула: $P_{10}^3 = C_{10}^3 p^3 q^7 = \ldots = 0{,}1171875$.
Решение будет отличаться смыслом и некоторыми комментариями, в частности:
$C_{10}^3 = 120$ способами можно выбрать 3 монеты, на которых выпадет орёл.
$p = \frac{1}{2}$ – вероятность выпадения орла на каждой из 10 монет
и т.д.
Однако на практике подобные задачи встречаются не столь часто, и, видимо, по этой причине формула Бернулли чуть ли не стереотипно ассоциируется только с повторными испытаниями. Хотя, как только что было показано, повторяемость вовсе не обязательна.
Следующая задача для самостоятельного решения:
Задача 3
Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков:

а) не выпадут *(выпадут 0 раз)*;
б) выпадут 2 раза;
в) выпадут 5 раз.
Результаты округлить до 4 знаков после запятой.
Краткое решение и ответ в конце урока.
Очевидно, что в рассматриваемых примерах некоторые события более вероятны, а некоторые – менее вероятны. Так, например, при 6 бросках кубика даже безо всяких расчётов интуитивно понятно, что вероятности событий пунктов «а» и «бэ» значительно больше вероятности того, что «пятёрка» выпадет 5 раз. А теперь поставим задачу найти

НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ число появлений события A в n независимых испытаниях

Опять же на уровне интуиции в Задаче №3 можно сделать вывод о том, что наивероятнейшее количество появлений «пятёрки» равно единице – ведь всего граней шесть, и при 6 бросках кубика каждая из них должна выпасть в среднем по одному разу. Желающие могут вычислить вероятность P_6^1 и посмотреть, будет ли она больше «конкурирующих» значений P_6^0 и P_6^2.

Сформулируем строгий критерий: для отыскания наивероятнейшего числа m_0 появлений случайного события A в n независимых испытаниях *(с вероятностью p в каждом испытании)* руководствуются следующим двойным неравенством:

$np - q \le m_0 < np + p$, причём:

1) если значение $np - q$ – дробное, то существует единственное наивероятнейшее число m_0;

в частности, если np – целое, то оно и есть наивероятнейшее число: $m_0 = np$;

2) если же $np - q$ – целое, то существуют **два** наивероятнейших числа: m_0 и $m_0 + 1$.

Наивероятнейшее число появлений «пятёрки» при 6 бросках кубика подпадает под частный случай первого пункта:

$$m_0 = np = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

В целях закрепления материала решим пару задач:

Задача 4

Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и соответствующую вероятность.

А это уже если и не Терминатор, то, как минимум, хладнокровный спортсмен =)

Решение: для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное неравенство $np - q \le m_0 < np + p$. В данном случае:

$n = 8$ – всего бросков;

$p = 0{,}3$ – вероятность попадания в корзину при каждом броске;

$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ – вероятность промаха при каждом броске.

Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в следующих пределах:

$$8 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \le m_0 < 8 \cdot 0{,}3 + 0{,}3$$

$$2{,}4 - 0{,}7 \le m_0 < 2{,}4 + 0{,}3$$

$$1{,}7 \le m_0 < 2{,}7$$

Поскольку левая граница – дробное число *(пункт №1)*, то существует единственное наивероятнейшее значение, и, очевидно, что оно равно $m_0 = 2$.

Используя формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:

$$P_8^2 = C_8^2 \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = 0{,}29647548$$

Ответ: $m_0 = 2$ – наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках,
$P_8^2 \approx 0{,}2965$ – соответствующая вероятность.

1 вариант

1. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что:
   a) выпадет четное число очков
   b) выпадет число очков, кратное трем.
2. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 р., на четыре билета – выигрыш по 50 р., на 10 билетов – выигрыш по 20 р., на 20 билетов – выигрыш по 10 р., на 165 билетов – выигрыш по 5 р., на 400 билетов – выигрыш по 1 р. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 рублей?
3. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.
4. В прямоугольник 5*4 см^2 вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

2 вариант

1. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что:
   c) выпадет нечетное число очков
   d) выпадет любое число очков, кроме 5.
2. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал её наугад. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.
3. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.
4. Внутри квадрата со стороной 10 см выделен круг радиусом 2 см. Случайным образом внутри квадрата отмечена точка. Какова вероятность того, что она попадет в выделенный круг?

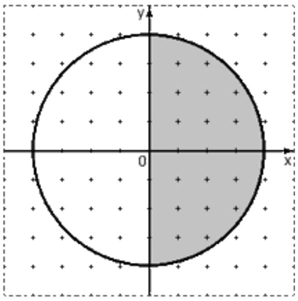
3 вариант

1. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, м, р, т, ю. карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вытянутых по одной карточке можно прочесть слово «юрта».

2. В партии из 50 деталей имеется 3 бракованных. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

3. В ящике находиться 4 белых и 1 черный шар. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты два белых шара.

4. Мишень имеет форму окружности радиуса 4. Какова вероятность попадания в ее правую половину, если попадание в любую точку мишени равновероятно? При этом промахи мимо мишени исключены.



4 вариант

1. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места?

2. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами А, К, К, Л, У. какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово «кукла»?

3. Из колоды карт в 36 листов наугад вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что это дама треф и валет пик?

4. Дано: АВ = 12 см, АМ = 2 см, MN = 4 см. На отрезок АВ случайным образом попадает точка Х. Какова вероятность того, что Х попадет на отрезок МВ?

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №40 Тренажеры по теме: Случайная величина

Случайной называют *величину*, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через X, Y, Z *, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, x_1, x_2, x_3.

* *Иногда используют* U, V, W *, а также греческие буквы*

Пример встретился нам на **первом же уроке по теории вероятностей**, где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

X – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** грань, какая именно – не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина X может принять одно из следующий значений:

$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6$.

Пример из статьи о **Статистическом определении вероятности**:

Y – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 3, \quad \ldots, y_9 = 9$, либо $y_{10} = 10$ мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И, дабы соблюсти форму, немного физкультуры:

Z – дальность прыжка в длину *(в некоторых единицах)*.

Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта :)

Тем не менее, ваши гипотезы?

Коль скоро, **множество действительных чисел** бесконечно, то случайная величина Z может принять *бесконечно много* значений из некоторого промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы**:

1) Дискретная *(прерывная)* случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

…нарисовались непонятные термины? Срочно повторяем **основы алгебры**!

2) Непрерывная случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Примечание*: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ*

Сначала разберём дискретную случайную величину, затем – **непрерывную**.

Поехали:

Закон распределения дискретной случайной величины

– это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

Довольно часто встречается термин ***ряд*** *распределения*, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

А теперь **очень важный момент**: поскольку случайная величина X *обязательно* примет **одно из значений** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, то соответствующие события образуют **полную группу** и сумма вероятностей их наступления равна единице:

$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$

или, если записать свёрнуто:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Без комментариев.

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

Пример 1

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

U	–5	2,5	10
	0,5	p_2	0,1

Найти p_2

…наверное, вы давно мечтали о таких задачах :) Открою секрет – я тоже. В особенности после того, как завершил работу над **теорией поля**.

Решение: так как случайная величина U может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Разоблачаем «партизана»:

$0{,}5 + p_2 + 0{,}1 = 1$

$p_2 + 0{,}6 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 1 - 0{,}6$ – таким образом, вероятность выигрыша $u_2 = 2{,}5$ условных единиц составляет 0,4.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$, в чём и требовалось убедиться.

Ответ: $p_2 = 0{,}4$

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют **классическое определение вероятности**, **теоремы умножения / сложения вероятностей событий** и другие фишки **тервера**:

Пример 2

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины V – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

Решение: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно $v_1 = 0$ рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по **классическому определению**:

$p_1 = \frac{38}{50} = 0{,}76$ – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша $v_2 = 100$ рублей составляет:

$p_2 = \frac{10}{50} = 0{,}2$

И для $v_3 = 1000$:

$p_3 = \frac{2}{50} = 0{,}04$

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}76 + 0{,}2 + 0{,}04 = 1$ – и это особенно приятный момент таких заданий!

Ответ: искомый закон распределения выигрыша:

V	0	100	1000
	0,76	0,2	0,04

1 вариант

Задача 1. Вероятность допустить ошибку равна 0,2. Найти вероятность того, что человек не допустит ошибку? Что более вероятно: допустить ошибку или не допустить ошибку.

Задача 2. Вероятность занять в соревновании 1 место – 0,7, а второе место – 0,1. Найти вероятность, что спортсмен займет первое или второе место.

Задача 3. Каждый из трех человек выбрал наугад один из семи цветов радуги. Найти вероятность, что первый выбрал красный, второй – желтый, а третий человек – синий цвет.

Задача 4. Есть две колоды карт и два игрока. Из первой колоды достают одну карту первому игроку, а из второй колоды – второму игроку. Найти вероятность, что кому-то дадут бубновую карту.

Задача 5. Вероятность снега равна 0,4. Найти вероятность, что в течение трех дней не будет снега.

Задача 6. Студент из 20 вопросов выучил 13 вопросов. На зачет студенту последовательно задают два вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на первый и на второй вопрос.

2 вариант

Задача 1. Вероятность попасть в мишень равна 0,9. Найти вероятность того, что человек не попадет в мишень? Что более вероятно: попасть или не попасть в мишень?

Задача 2. Вероятность допустить одну ошибку в контрольной работе равна 0,4. Вероятность допустить две ошибки равна 0,3. Найти вероятность того, что студент допустит одну или две ошибки.

Задача 3. Каждый из трех человек выбрал себе по одной из семи нот. Найти вероятность того, что все первый и второй выбрали ноту ДО, а третий человек выбрал ноту ЛЯ.

Задача 4. Есть две колоды карт и два игрока. Из первой колоды достают одну карту первому игроку, а из второй колоды – второму игроку. Найти вероятность, что кому-то дадут короля.

Задача 5. Вероятность сдать зачет равна 0,7. Найти вероятность, что студент три раза сдавал зачет и все три раза его не смог сдать.

Задача 6. В корзине 6 красных и 8 зеленых шара. Человек последовательно достает три шара. Найти вероятность, что первый шар будет красным, а второй и третий зелеными.

3 вариант

Задача 1. Вероятность поломки машины равна 0,1. Найти вероятность того, что машина не сломается? Что более вероятно: машина сломается или не сломается?

Задача 2. Вероятность сдать экзамен на 3 – 0,7. Вероятность сдать экзамен на 4 – 0,2. Найти вероятность, что студент сдать экзамен или на 3, или на 4.

Задача 3. У трех человек спросили, в какой месяц они родились. Найти вероятность, что все три человека родились в марте.

Задача 4. Есть две колоды карт и два игрока. Из первой колоды достают одну карту первому игроку, а из второй колоды – второму игроку. Найти вероятность, что кому-то дадут даму черной масти.

Задача 5. Для студента Иванова вероятность сдать зачет равна 0,5. Для студента Петрова вероятность сдать зачет равна 0,8. Для студента Сидорова вероятность сдать зачет равна 0,3. Найти вероятность того, что все трое не сдадут зачет.

Задача 6. В корзине 6 красных, 8 зеленых и 7 черных шара. Человек последовательно достает два шара. Найти вероятность, что первый шар будет красным, а второй черным.

4 вариант

Задача 1. Вероятность сдать зачет равна 0,4. Найти вероятность того, что студент зачет не сдаст? Что более вероятно: сдать зачет или его не сдать.

Задача 2. Вероятность снега – 0,5. Вероятность дождя – 0,3. Найти вероятность того, что будет снег или дождь.

Задача 3. У двух человек спросили, в какой день недели они родились. Найти вероятность, что все три родились в понедельник.

Задача 4. Есть две колоды карт и два игрока. Из первой колоды достают одну карту первому игроку, а из второй колоды – второму игроку. Найти вероятность, что кому-то дадут черную масть.

Задача 5. Человек дважды делает одно и тоже упражнение. Вероятность допустить ошибку равна 0,7. Найти вероятность того, что человек не допустит ошибок.

Задача 6. Человек последовательно достает из колоды три карты. Найти вероятность, что первая карта будет вольтом, вторая карта – тузом, а третья карта - дамой.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 5-6 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3-4 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №11 Тренажеры по теме: Равносильность уравнений

Равносильность уравнений

Определение 1: Два уравнения с одной переменной f(x)=g(x) и p(x)=h(x) называются **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Определение 2: Если каждый корень уравнения f(x)=g(x) (1)
является в тоже время корнем уравнения p(x)=h(x) (2),
то уравнение (2) называют **следствием** уравнения (1).

$$(1)\rightarrow(2)$$

Очевидно: Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

$$(1)\leftrightarrow(2)$$

Схема решения любого уравнения:

1.Технический этап. Осуществляется преобразование уравнения(1)→(2)→(3)→(4) …
2. *Анализ решения.* Все ли преобразования были равносильными?
3.*Проверка.*

Реализация данного плана связана с поиском ответов на четыре вопроса:

1. Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?
2. Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?
3. Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?
4. В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

1.Теоремы о равносильности уравнений.
«спокойные» теоремы:

Теорема 1. Если какой либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (где a>0, a≠1) равносильно уравнению f(x)=g(x).

«беспокойные» теоремы:

Определение: Областью определения уравнения f(x)=g(x) или**областью допустимых значений (ОДЗ)** переменной называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения f(x) и g(x).

Теорема 4. Если обе части уравнения f(x)=g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), которое:
А) имеет смысл всюду в области определения (в ОДЗ) уравнения f(x)=g(x)
Б) нигде в этой области не обращается в 0 –
то получится уравнение f(x) h(x)=g(x) h(x), равносильное данному.
Следствие («спокойное» утверждение): Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения f(x)=g(x) неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень *n* получится уравнение, равносильное данному $f(x)^n=g(x)^n$.

Теорема 6. Если f(x) >0 и g(x) >0, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где a>0, a≠1, равносильно уравнению f(x)=g(x).

2. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие.

Если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4,5,6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировках теорем, то получится уравнение-следствие.

Некоторые переходы от одного уравнения к другому приводят к расширению области определения уравнения. Именно в добавленную часть ОДЗ и «проникают» посторонние корни.

Причины расширения области определения уравнения.

1. Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.
2. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени.
3. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Обязательна проверка всех найденных корней, если:

1. произошло расширение области определбения уравнения.
2. осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень.
3. выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

3. О проверке корней.

Как правило, самый легкий обходной путь проверки – по области определения (ОДЗ) заданного уравнения. Но не переоценивайте этот способ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения других причин нарушения равносильности, кроме расширения области определения, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется метод возведения в квадрат, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит; лучше, если это возможно, делать проверку подстановкой.

4. О потере корней.

Причины потери корней при решении уравнений:

1. деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение h(x) (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие h(x) $\neq 0$).
2. сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.
3. замена уравнения h (f(x))= h (g(x)) уравнением f(x)=g(x) в том случае, если функция y= h(x) – немонотонная функция.
Этот метод можно применить только в том случае, если функция y= h(x) – монотонная функция.

1 вариант

1. Добавьте дополнительное условие так, чтобы уравнения
$a * b = d * b$ и $a = d$ были равносильны
2. Решить 2-мя способами уравнение:
$2\sqrt{1 - x^2} = x - 2$ и сделать вывод
3. Равносильны ли уравнения:
$$5^{x+1} + 5^x = 750 \quad и \quad x^2 - 9 = 0?$$
4. Решить уравнение:
$\sin 4x = 0$ и вычислить полученный результат при $k = 0;\ \pm 2$
5. Найти корень уравнения:
$$\frac{2x-9}{2x-5} - \frac{3x}{2-3x} = 2$$

2 вариант

1. Добавьте дополнительное условие так, чтобы уравнения $\sqrt{a} = b$ и $a = b^2$ были равносильны
2. Решить 2-мя способами уравнение: $\sqrt{x+1} = x - 1$ и сделать вывод
3. Равносильны ли уравнения: $6^{x+2} - 6^x = 35 \quad и \quad x^2 = 0$?
4. Решить уравнение: $\cos 6x = 1$ и вычислить полученный результат при $k = 0;\ \pm\frac{1}{2}$
5. Найти корень уравнения:

$$\frac{2x-1}{x-3} + \frac{5-4x}{3-x} = 6$$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №42 Тренажеры по теме: Основные приемы решения уравнений

Решение уравнения – это процесс, состоящий в основном в замене заданного уравнения другим уравнением, ему равносильным. Такая замена называется **тождественным преобразованием.** Основные тождественные преобразования следующие:

1.Замена одного выражения другим, тождественно равным ему. Например, уравнение $(3x+2)^2 = 15x+10$ можно заменить следующим равносильным: $9x^2 + 12x + 4 = 15x + 10$.

2.Перенос членов уравнения из одной стороны в другую с обратными знаками. Так, в предыдущем уравнении мы можем перенести все его члены из правой части в левую со знаком « – »: $9x^2 + 12x + 4 - 15x - 10 = 0$, после чего получим: $9x^2 - 3x - 6 = 0$.

3.Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение (число), отличное от нуля. Это очень важно, так как новое уравнение может не быть равносильным предыдущему, если выражение, на которое мы умножаем или делим, может быть равно нулю.

П р и м е р . Уравнение $x - 1 = 0$ имеет единственный корень $x = 1$.
Умножив обе его части на $x - 3$, мы получим уравнение $(x - 1)(x - 3) = 0$, у которого два корня: $x = 1$ и $x = 3$.
Последнее значение не является корнем заданного уравнения $x - 1 = 0$. Это так называемый **посторонний корень**.
И наоборот, деление может привести к **потере корня**. Так в нашем случае, если $(x - 1)(x - 3) = 0$ является исходным

уравнением, то корень $x = 3$ будет потерян при делении обеих частей уравнения на $x – 3$.

В последнем уравнении (п.2) мы можем разделить все его члены на 3 (не ноль!) и окончательно получим:

$$3x^2 - x - 2 = 0 .$$

Это уравнение равносильно исходному:

$$(3x+ 2)^2 = 15x + 10 .$$

4.Можно возвести обе части уравнения в нечётную степень или извлечь из обеих частей уравнения корень нечётной степени. Необходимо помнить, что:

а) возведение в чётную степень может привести к приобретению посторонних корней;

б) неправильное извлечение корня чётной степени может привести к потере корней.

П р и м е р ы . Уравнение $7x = 35$ имеет единственный корень $x = 5$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение:

$$49x^2 = 1225 .$$

имеющее два корня: $x = 5$ и $x = – 5$. Последнее значение является посторонним корнем.
Неправильное извлечение квадратного корня из обеих частей уравнения $49x^2 = 1225$ даёт в результате $7x = 35$, и мы теряем корень $x = – 5$.
Правильное извлечение квадратного корня приводит к уравнению: $| 7x | = 35$, а следовательно, к двум случаям:

1) $7x = 35$, тогда $x = 5$; 2) $– 7x = 35$, тогда $x = – 5$.

Следовательно, при правильном извлечении квадратного корня мы не теряем корней уравнения.
Что значит правильно извлечь корень? Здесь мы встречаемся с очень важным понятием **арифметического корня**

1 вариант:

Выберите способ решения уравнения, и найдите его корни:

1. $x^3 + 3x^2 = 0;$
2. $4^x - 10 \cdot 2^x = 24;$
3. $\dfrac{4}{x^2+4} + \dfrac{5}{x^2+5} = 2;$
4. $x - 1 = \sqrt{x+5}$
5. $\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3$.

2 вариант:

Выберите способ решения уравнения, и найдите его корни:

1. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$;
2. $5^x - 24 = \dfrac{25}{5^x}$;
3. $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{29}{10}$;
4. $\left(x^2 - 4\right)\sqrt{x+5} = 0$;
5. $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №43 Тренажеры по теме: Системы уравнений

Система уравнений – это группа уравнений, в которых одни и те же неизвестные подразумевают одни те же числа. Чтобы показать что уравнения рассматриваются как система, слева от них ставится фигурная скобка:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Решить систему уравнений – это значит найти общие решения для всех уравнений системы или убедится что решения нет.

Чтобы решить систему уравнений нужно исключить одно неизвестное, то есть из двух уравнений с двумя неизвестными составить одно уравнение с одним неизвестным. Исключить одно из неизвестных можно тремя способами: подстановкой, сравнением, сложением или вычитанием.

Способ подстановки

Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, нужно в одном из уравнений выразить одно неизвестное через другое и результат подставить в другое уравнение, которое после этого будет содержать только одно неизвестное. Затем находим значение этого неизвестного и подставляем его в первое уравнение, после этого находим значение второго неизвестного.

Рассмотрим решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Сначала найдём чему равен x в первом уравнении, для этого перенесём все члены уравнения, не содержащие неизвестное x, в правую часть:

$$x - 4y = 2$$
$$x = 2 + 4y$$

Так как x, на основании определения системы уравнений, имеет такое же значение и во втором уравнении, то подставляем его значение во второе уравнение и получаем уравнение с одним неизвестным:

$3x - 2y = 16$

$3(2 + 4y) - 2y = 16$

Решаем полученное уравнение, чтобы найти чему равен y. Как решать уравнения с одним неизвестным вы можете посмотреть в соответствующей теме.

$3(2 + 4y) - 2y = 16$

$6 + 12y - 2y = 16$

$6 + 10y = 16$

$10y = 16 - 6$

$10y = 10$

$y = 10 : 10$

$y = 1$

Мы определили что $y = 1$, теперь, для нахождения численного значения x, подставим значение y в преобразованное первое уравнение, где мы ранее нашли какому выражению равен x:

$$x = 2 + 4y = 2 + 4 \cdot 1 = 2 + 4 = 6$$

Ответ: $x = 6$, $y = 1$.

Способ сравнения

Способ сравнения – это частный случай подстановки. Чтобы решить систему уравнений способом сравнения, нужно в обоих уравнениях найти какому выражению будет равно одно и тоже неизвестное и приравнять полученные выражения друг к другу. Получившееся в результате уравнение позволяет узнать значение одного неизвестного, с помощью этого значения затем вычисляется значение второго неизвестного.

Например, для решение системы:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

найдём в обоих уравнениях чему равен y (можно сделать и наоборот – найти чему равен x):

$x - 4y = 2$	$3x - 2y = 16$
$-4y = 2 - x$	$-2y = 16 - 3x$
$y = (2 - x) : - 4$	$y = (16 - 3x) : -2$

Составляем из полученных выражений уравнение:

$$\frac{2 - x}{-4} = \frac{16 - 3x}{-2}$$

Решаем уравнение, чтобы узнать значение x:

$$\frac{2 - x}{-4} \cdot (-4) = \frac{16 - 3x}{-2} \cdot (-4)$$

$2 - x = 32 - 6x$

$2 - x + 6x = 32 - 2$

$5x = 30$

$x = 30 : 5$

$x = 6$

Теперь подставляем значение x в первое или второе уравнение системы и находим значение y:

$x - 4y = 2$	$3x - 2y = 16$
$6 - 4y = 2$	$3 \cdot 6 - 2y = 16$
$-4y = 2 - 6$	$-2y = 16 - 18$
$-4y = -4$	$-2y = -2$
$y = 1$	$y = 1$

Ответ: $x = 6$, $y = 1$.

Способ сложения или вычитания

Чтобы решить систему уравнений способом сложения, нужно составить из двух уравнений одно, сложив левые и правые части, при этом одно из неизвестных должно быть исключено из полученного уравнения. Неизвестное можно исключить уравняв при нём коэффициенты в обоих уравнениях.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Уравняем коэффициенты при неизвестном y, умножив все члены второго уравнения на -2:

$$(3x - 2y) \cdot -2 = 16 \cdot -2$$
$$-6x + 4y = -32$$

получим:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ -6x + 4y = -32 \end{cases}$$

Теперь сложим по частям оба уравнения, чтобы получить уравнение с одним неизвестным:

$$+\begin{array}{r} x - 4y = 2 \\ -6x + 4y = -32 \\ \hline -5x \quad = -30 \end{array}$$

Находим значение x ($x = 6$). Теперь подставив значение x в любое уравнение системы, найдём $y = 1$.

Если уравнять коэффициенты у x, то для исключения этого неизвестного нужно было бы вычесть одно уравнение из другого.

Уравняем коэффициенты при неизвестном x, умножив все члены первого уравнения на 3:

$$(x - 4y) \cdot 3 = 2 \cdot 3$$
$$3x - 12y = 6$$

получим:

$$\begin{cases} 3x - 12y = 6 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Теперь вычтем по частям второе уравнение из первого, чтобы получить уравнение с одним неизвестным:

$$-\begin{array}{r} 3x - 12y = 6 \\ 3x - 2y = 16 \\ \hline -10y = -10 \end{array}$$

Находим значение y ($y = 1$). Теперь подставив значение y в любое уравнение системы, найдём $x = 6$:

$3x - 2y = 16$

$3x - 2 \cdot 1 = 16$

$3x - 2 = 16$

$3x = 16 + 2$

$3x = 18$

$x = 18 : 3$

$x = 6$

Ответ: $x = 6$, $y = 1$.

Для решения системы уравнений, рассмотренной выше, был использован способ сложения, который основан на следующем свойстве:

Любое уравнение системы можно заменить на уравнение, получаемое путём сложения (или вычитания) уравнений, входящих в систему. При этом получается система уравнений, имеющая те же решения, что и исходная.

1 вариант:

1. $\begin{cases} x + xy = 3 \\ xy^2 + xy^3 = 12 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} 2 \cdot 6^x - 3y = 69 \\ 6^{x-1} - y = 5 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_{48} x + \log_{48} y = 1 \end{cases}$.

2 вариант:

1. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 218 \\ x^2 + xy + y^2 = 109 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 6^{x+y} = 216 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 2 \\ \log_5 x - \log_5 y = 4 \end{cases}$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания

«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №44 Тренажеры по теме: Решение неравенств

Неравенством называется выражение, в котором функции соединяются знаками отношения >, <, $\geq$, $\geq$. Неравенства бывают как числовые, так и буквенные. Неравенства с двумя знаками отношения, называются двойными, с тремя - тройными и т.д. Например:
$a(x) > b(x)$,
$a(x) < b(x)$,
$a(x) \geq b(x)$,
$a(x) \geq b(x)$.
$a(x) < c(x) < b(x)$ - двойное неравенство.
Неравенства, содержащие знак > или < , называются строгими, а неравенства, содержащие $\geq$ или $\geq$ - нестрогими.
Решением неравенства является любое значение переменой, при котором это неравенство будет верно.
"**Решить неравенство**" означает, что надо найти множество всех его решений.
Существуют различные **методы решения неравенств**. Для **решения неравенства** пользуются числовой прямой, которая бесконечна. Например, **решением неравенства** $x > 3$ есть промежуток от 3 до $+\infty$, причем число 3 не входит в этот промежуток, поэтому точка на прямой обозначается пустым кружком, т.к. неравенство строгое.

Ответ будет следующим: $x \in (3; +\infty)$.
Значение x=3 не входит в множество решений, поэтому скобка круглая. Знак бесконечности ∞ всегда выделяется круглой скобкой. Знак $\in$ означает «принадлежание».
Рассмотрим как решать неравенства на другом примере со знаком $\geq$:
$x \geq 2$

Значение x=2 входит в множество решений, поэтому скобка квадратная и точка на прямой обозначается закрашенным кружком.
Ответ будет следующим: $x \in [2; +\infty)$.

Свойства неравенств

Выделяют три основных свойства неравенств:

1. Можно перенести любой член неравенства из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, при этом знак неравенства не меняется.

Пример:
$3x + 5 > x^2$
равносильно $3x - x^2 + 5 > 0$, при этом x^2 был перенесен с противоположным знаком.

2. Можно умножать или делить обе части неравенства на одно и то же положительное число, при этом знака неравенства не меняется.

   Пример:
   $9x - 3 > 12x^2$
   равносильно $3x - 1 > 4x^2$, при этом обе части первого неравенства были разделены на положительное число 3.

3. Можно умножить или разделить обе части неравенства на одно и то же отрицательное число, при этом знак неравенства меняется на противоположный.

   Пример:
   $-2x^2 - 3x + 1 < 0$ равносильно $2x^2 + 3x - 1 > 0$, при этом обе части первого неравенства умножили на отрицательное число -1, и знак неравенства изменился на противоположный.

Решение систем неравенств

Системой называется запись нескольких неравенств, обозначенная фигурной скобкой, при этом количество и вид неравенств, входящих в систему, может быть любым. Решением системы неравенств является пересечение решений всех неравенств, входящих в эту систему. Например, двойное неравенство $f(x) < g(x) < h(x)$ записывается следующим образом: $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) < h(x). \end{cases}$
Пример.

Требуется решить следующую систему неравенств $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases}$ <="" p="" style="border: none;">

Решение:

Система аналогична неравенству $x > 1$, поэтому ответ: $x \in (1; +\infty)$.

Решение линейных неравенств

Линейным называется неравенство вида $ax>b$, при этом знак неравенства может быть любым.

Допустим $a>0$, тогда $ax>b$ равносильно $x > \frac{b}{a}$, таким образом множество решений неравенства является промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Допустим $a>0$, тогда $ax>b$ равносильно $x < \frac{b}{a}$, таким образом множество решений неравенства является промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.

Если же a=0, тогда 0*x>b, т.е. неравенство не имеет решений при b $\geq$ 0, и верно при любых x при b<0.

Решение квадратных неравенств

Квадратным называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, в котром a, b, c – некоторые действительные числа и a $\neq$ 0

Простейшими квадратными неравенствами являются неравенства $x^2 < m$ и $x^2 > m$

Множество решений неравенства $x^2 < m$:

1. при m< 0 нет чисел, которые в квадрате дают отрицательное число (т.е. нет решений)
2. при m>0 x $\in$ (-$\sqrt{m}$; $\sqrt{m}$), т.е. -$\sqrt{m}$ < x < $\sqrt{m}$ или $|x|$< $\sqrt{m}$.

Множество решений неравенства $x^2 > m$:

1. при m<0 x $\in$ R (т.е. x - любое действительное число);
2. при m>0 x $\in$ (-∞; -$\sqrt{m}$) $\cup$ ($\sqrt{m}$; +∞), т.е. -∞ < x < -$\sqrt{m}$ и $\sqrt{m}$ < x < +∞ или $|x|$ > $\sqrt{m}$.

Решение более сложных квадратных неравенств сводиться к простому переводу выражения вида

$ax^2 + bx + c > 0$

в неравенство

(x-x1)(x-x2) > 0 , где x1 и x2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Полученное неравенство мы раскладываем таким же образом на систему простых неравенств и легко находим решение.

Решение неравенств методом интервалов

Методом интервалов можно Формулу Неравества вида h(x) > 0 (<, $\geq$, $\geq$) свести к решению уравнения h(x) = 0.

Данный метод заключается в следующем:

1. Находится ОДЗ неравенства.
2. Неравенство приводится к виду h(x) > 0(<, $\geq$, $\geq$) путем упрощения.
3. Решается уравнение h(x) = 0.
4. Если на ОДЗ отмечены точки, они ограничивают его и разбивают на интервалы знакопостоянства, при этом знак функции h(x) определяется на каждом таком интервале.
5. Решением является объединение отдельных множеств, на которых h(x) имеет соответствующий знак. После дополнительной проверки точки ОДЗ, являющиеся граничными, включаются (или не включаются) в ответ.

Метод интервалов основывается на том, что непрерывная функция h(x) меняет знак либо в граничных точках «разрыва» на ОДЗ, либо при переходе через 0, т.е. в тех точках, которые являются корнями уравнения h(x) = 0. В других точках перемены знака не происходит.

Пример.

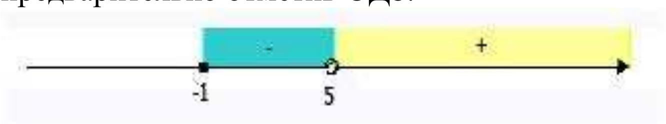
Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-5} \geq 0.$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-5 \neq 0; \end{cases}$ откуда имеем x $\in$ [-1; 5) $\cup$ (5; +∞)

Решим уравнение $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-5} = 0.$

Числитель дроби равен 0 при x = -1, это и есть корень уравнения. Отметим найденный корень на числовой прямой (черным кружком, т.к. неравенство нестрогое), предварительно отметив ОДЗ:



Чтобы определить знак на промежутке (-1; 5) возьмем число 0, $f(0) = \dfrac{\sqrt{0+1}}{0-5} = -\dfrac{1}{5} < 0,$

Чтобы определить знак на втором промежутке возьмем число 8, $f(8) = \dfrac{\sqrt{8+1}}{8-5} = \dfrac{3}{3} > 0.$

Точки 0 и 8 выбирались произвольно, но так, чтобы упростить процесс вычисления каждого значения функции.

Ответ: (-5; +∞).

1 вариант:

1. $\dfrac{9-x^2}{4x^2-25} \geq 0;$
2. $\sqrt{2x-7} \leq x+2;$
3. $(2x-1)(x^2+x+1) \succ 0;$
4. $\log_{0,5}(4x-7) \prec \log_{0,5}(x+2);$
5. $4^{5-2x} \leq 0{,}25.$

2 вариант:

1. $\dfrac{x^3(x-3)}{(x+1)^2} \succ 0;$
2. $x+8 \geq 6\sqrt{x-1};$
3. $(x^2-4x+3)(3x-1) \leq 0;$
4. $\log_3(2x-4) \prec \log_3(x+1);$
5. $0{,}4^{2x+1} \geq 0{,}16.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Использованная литература:

1. Башмаков М.И., Математика. Задачник : учеб. пособие для образоват. Учреждений нач. и сред. проф. Образования / М.И. Башмаков. – 2-е изд.,стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 416 с.
2. Башмаков М.И., Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2014г. – 256 с.
3. Башмаков М.И., Математика (базовый уровень): учебник для 11 класса: среднее общее образование / М.И. Башмаков.– М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 320 с
4. Башмаков М.И., Математика (базовый уровень): учебник для 10 класса: среднее общее образование / М.И. Башмаков.– М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 304 с
5. Башмаков М.И., Математика 10 класс: сборник задач: среднее общее образование / М.И. Башмаков.– М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 272 с
6. Башмаков М.И., Математика 11 класс: сборник задач: среднее (полное) общее образование / М.И. Башмаков.– 3-е изд. - М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 288 с
7. Гусев В.А., Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образоват. учреждений нач. и сред. проф. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 384с.
8. «Виктория плюс», Математика в таблицах и схемах. Для школьников и абитуриентов. Изд. 2-е, испр.и доп. СПб, «Виктория плюс», 2012. – 224 стр.
9. Ершова А.П., Голобородько В.В., Вся школьная математика в самостоятельных и контрольных работах. Алгебра 7-11. – М.: Илекса, 2010, - 640 с.
10. Мордкович А.Г., Алгебра 9 класс : методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 72с.: ил.
11. Ольховая Л.С., Математика. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. – 176с. – (Готовимся к ЕГЭ).
12. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс.- М.:ВАКО,2011. - 352с. - (В помощь школьному учителю).