Министерство образования и науки РС (Я)
ГБПОУ РС (Я) «Ленский технологический техникум»
Филиал "Пеледуйский"

Методические рекомендации
по выполнению практических занятий
по учебной дисциплине

ЕН. 01 «Математика»

26.02.03 «Судовождение»

Пеледуй 2023

Методические рекомендации по выполнению практических занятий разработаны в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования **26.02.03 «Судовождение»**, (далее – ФГОС) к содержанию и уровню подготовки выпускника в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины **ЕН.01 «Математика»**, утвержденных ГБПОУ РС(Я) «Ленский технологический техникум» филиал «Пеледуйский».

Автор: Хоменко Е.С. – преподаватель высшей категории

Рассмотрена и рекомендована предметно – цикловой комиссией
филиала «Пеледуйский»
Протокол № 2 «27» сентября 2023г.

Председатель ПЦК ____________ /Вавилова Е.Ю. /

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Сборник содержит методические указания по выполнению практических работ по дисциплине: Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия.

Цель настоящих методических указаний – дать студенту необходимые методические указания по организации и выполнению практических работ в период учебного процесса.

Проведению каждой работы предшествует контроль и подготовка к ней. Для этого по рекомендуемым учебным пособиям, лекциям и настоящему сборнику следует разобраться в содержании заданной практической работы, усвоить основные положения, необходимые для ее выполнения.

Студенты должны проявлять научный и практический интерес к практическим занятиям, строго выполнять учебный график, ставить поисковые вопросы и задачи. Кроме того, студент должен самостоятельно работать с литературой и УМК, а также кратко и четко выражать свои мысли при защите работы.

В процессе проведения практических работ реализуются комплексная проверка следующих знаний и умений:

Результаты обучения З,У (Код)	Показатели оценки результата
У.1	- выполняет арифметические действий над числами (целыми, действительными и рациональными; отрицательными и положительными); - умеет находить приближенные значения величин и погрешностей вычислений (абсолютная и относительная); - умеет сравнивать числовые выражения; - находит значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; - выполняет преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций; - умеет вычислять значения функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции; - умеет строить графики изученных функций; - находит производные элементарных функций; - использует производные для изучения свойств функций и построения графиков; - применяет производную для проведения приближенных вычислений, решения задач прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения; - умеет вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла; -умеет решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичных неравенств и систем; - распознаёт на чертежах и моделях пространственных форм; - описывает взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументация своих суждений об этом расположении;

	- анализирует в простейших случаях взаимного расположения объектов в пространстве; - выполняет чертежи по условиям задач; - умеет строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды; - решает планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); - использует при решении стереометрических задач планиметрических фактов и методов; - проводит доказательные рассуждения в ходе решения задач.
У.2	- умеет использовать графический метод решения уравнений и неравенств; - умеет изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными; - знает определение свойств функции по её графику - умеет составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.
З.1	- выполняет практические расчеты по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства; - интерпретирует графики реальных процессов; - исследует и проводит построение правильных многогранников на основе изученных формул и свойств геометрических фигур; - называет последовательность действий при решении систем уравнений разложением на множители, введением новых неизвестных, подстановкой, графическим методом; - формулирует определения и перечисляет свойства скалярного, векторного и смешанного произведения векторов; - формулирует правила дифференцирования и называет производные основных элементарных функций; - называет табличные интегралы; - формулирует классическое определение вероятности; - знает последовательность действий при выполнении арифметических действий над числами; - находит приблизительные значения величин; - исследует функции и строит графики; - преобразует графики функций; - использует формулы для преобразования простейших тригонометрических выражений и решения тригонометрических уравнений и неравенств; - преобразует выражения, содержащие степень с рациональным показателем, радикалы; - преобразует логарифмические выражения; - решает иррациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства; - находит производные функций, используя формулы дифференцирования; - пользуется геометрическими преобразованиями пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости при изображении пространственных фигур; - находит поверхности, вычисляет объемы многогранников и круглых тел.
З.2	- пользуется формулами вычисления длин, площадей и объемов реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства; - пользуется аппаратом математического анализа при решении геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, в том числе задач на

	наибольшие и наименьшие значения; - анализирует реальные числовые данные, представленные в виде диаграмм, графиков; - анализирует информацию статистического характера; - знает формулировку геометрического и механического смысла производной; - знает приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, пути, пройденного точкой; - умеет описывать процесс в естествознании и технике с помощью дифференциальных уравнений.

Критерии оценки практических работ:

Показатели оценивания практической работы

Наименование ОПОР	**25 баллов**	**20 баллов**	**15 баллов**	**10 баллов**
1.Владение знаниями терминологии	Знает и понимает термины и определения	Знает и понимает термины и определения, но допускает незначительные ошибки	В целом понимает, но допускает ошибки в знании терминологии и определений, исправляет после замечаний	Не раскрывает содержание термина, неуместно применяет термины
2.Результативность информационного поиска	Информация найдена верно, небольшие недочеты исправляются студентом сразу, помогает в поиске информации одногрупникам	Информация найдена не полная с неточностями, которые студент исправляет самостоятельно	Студент самостоятельно, в срок, с недочетами выполняет задания, с помощью преподавателя делает выводы	Информация найдена не полная с неточностями, которые студент не может исправить без помощи преподавателя
3.Скорость и техничность выполнения заданий	Студент самостоятельно, в срок и верно выполняет задания, делает выводы, помогает одногруппникам	Студент самостоятельно, в срок, с небольшими недочетами выполняет задания, делает выводы, помогает одногруппникам	Студент самостоятельно, в срок, с недочетами выполняет задания, с помощью преподавателя делает выводы	Студент с помощью преподавателя, несвоевременно, с недочетами выполняет задания, с помощью преподавателя делает выводы
4.Оформление заданий	Задания оформляет аккуратно в соответствии с требованиями преподавателя, в соответствии с ГОСТ	Задания оформляет аккуратно, но имеются замечания	Задания выполняет неаккуратно, со значительными замечаниями	Оформление не соответствует требованиям
5.Аргументированность суждений, широта кругозора	В письменной и устной речи приводит примеры, факты, описывает явления, производит сравнения, анализ, делает выводы	В письменной и устной речи приводит примеры, факты, описывает явления, производит сравнения, анализ, делает выводы, но затрудняется в	Приводит примеры, описывает явления, факты, но затрудняется в логическом изложении, анализе, сравнении, выводах	Приводит примеры, факты, описывает явления, не делает выводы, сравнения

		построении логического изложения материала		
6.Поиск, обработка и предоставление информации по изучаемому материалу	Работает с литературой, поисковыми системами, подготовленная информация соответствует темам задания, полно раскрыта, отображена, при необходимости сопровождается наглядностью (схемами, рисунками), предоставляется логично в соответствии с требованиями, даются ссылки на источники	Работает с литературой, поисковыми системами, подготовленная информация соответствует темам задания, полно раскрыта, предоставление информации не в полной мере соответствует требованиям	Недостаточно проведен сбор и обработка информации, предоставление информации не соответствует требованиям	Проведен поиск и сбор информации, тема не раскрыта, или не соответствует заданию
7.Использование учебно-лабораторного оборудования для решения практических задач (измерительные приборы и инструменты)	Знает устройство, назначение, методы работы с учебно-лабораторным оборудованием, производит работы с применением учебно-лабораторного оборудования в соответствии с требованиями и технологией, соблюдает технику безопасности, бережно относится к оборудованию. Может оказать помощь в работе одногрупникам	Знает устройство, назначение, методы работы с учебно-лабораторным оборудованием, но допускает ошибки в работе с учебно-лабораторным оборудованием, соблюдает технику безопасности, бережно относится к оборудованию	Не в полной мере владеет знаниями устройства, назначения, методами работы с учебно-лабораторным оборудованием. Производит работы с замечаниями, соблюдает технику безопасности	Не в полной мере владеет знаниями устройства, назначения, методами работы с учебно-лабораторным оборудованием. Производит работы с нарушением технологии, принципов работы, имеет замечания по технике безопасности
8.Время на выполнение задания	Соблюдение время и подготовки задания, сроков	Превышение времени выполнения на 10 %	Превышение времени выполнения на 20%	Превышение времени выполнения на 30 и более %

	сдачи заданий.			

Методика проведения контроля и критерии оценки работ

Каждая практическая работа выполняется студентами в ходе учебного занятия или во время, отведённое на самостоятельную внеаудиторную работу студента по индивидуальным заданиям после изучения соответствующей темы.

Работа оценивается по пятибалльной системе:

Оценка 5 (отлично) выставляется в случаях полного выполнения всего объёма работы, отсутствия существенных ошибок при вычислениях и построениях графиков и рисунков, грамотного и аккуратного выполнения всех заданий, наличия вывода.

Оценка 4 (хорошо) выставляется в случае полного при наличии выполнения всего объёма работы и несущественных ошибок при вычислениях и построении графиков и рисунков, не влияющих на общий результат решения.

Оценка 3 (удовлетворительно) выставляется в случаях в основном полного выполнения работы при наличии ошибок, которые не оказывают существенного влияния на окончательный результат.

Оценка 2 (неудовлетворительно) выставляется в случае, когда допущены принципиальные ошибки (перепутаны формулы, нарушена последовательность вычислений, отсутствует перевод физических величин в систему СИ и т.д.).

В течение всего времени обучения студенту предоставляется возможность повысить результаты усвоения учебной дисциплины путём повторного выполнения другого варианта.

Практическая работа №1: Тренажеры по теме: Показательные и логарифмические функции

Цель: отработка навыков построения графиков.

Форма организации студентов на занятии: фронтальная.

Методические указания. Пусть функция задана аналитически формулой y=f(x).Если на координатной плоскости отметить все точки, обладающие следующим свойством: абсцисса точки принадлежит области определения функции, а ордината равна соответствующему значению функции, то множество точек (x;f(x))есть график функции. На практике для построения графика функции составляют таблицу значений функции при некоторых значениях аргумента, наносят соответствующие точки и соединяют полученные точки линией. При этом предполагают, что график функции является плавной линией, а найденные точки достаточно точно показывают ход изменения функции. Для того, чтобы начать строить графики функций давайте повторим ещё как на координатной плоскости наносят точки. Итак, нам надо нанести точку с координатами(1;2)это значит x=1, y=2. Проводят линии x=1 и y=2 и на пересечении этих линий

иполучая х Пример . Построить график функции

Область определения х- любое

число.$y = 2x + 1$- это прямая. Пусть $x = 0$, тогда $y(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$

Пусть $x = 2$, тогда $y(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Для построения прямой линии достаточно двух точек (0;1) и (2;5).

1 вариант

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$; 2) $y = 34^x$.

2. Сравните числа:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$; 2) 45^3 и 45^4;

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = \log_{0.4} x$; 2) $y = \log_5 x$

2 вариант

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = 89^x$; 2) $y = \left(\frac{4}{9}\right)^x$

2. Сравните числа:

1) $12^{5,6}$ и 12^7; 2) $\left(\frac{9}{11}\right)^{-5}$ и $\left(\frac{9}{11}\right)^{-1}$;

3.Постройте схематически график функции:

1) $y = \log_{0.7} x$; 2) $y = \log_{12} x$

3 вариант

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = 0{,}06^x$; 2) 56^x

2. Сравните числа:

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{8,6}$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$; 2) 21^{-5} и 1;

3.Постройте схематически график функции:

1) $y = \log_{3,5} x$; 2) $y = \log_{0,1} x$

4 вариант

1. Постройте схематически график функции:

1) $y = \left(\frac{34}{78}\right)^x$; 2) $y = 1000^x$

2. Сравните числа:

1) 96^{-78} и 96^{-67}; 2) $\left(\frac{2}{7}\right)^{2,3}$ и $\left(\frac{2}{7}\right)^{5,3}$

3.Постройте схематически график функции:

1) $y = \log_{\frac{1}{7}} x$; 2) $y = \log_{17} x$

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4-5 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №2: Тренажеры по теме: Показательные уравнения

Цель: отработка навыков решения упражнений на решениепоказательных уравнений.

Форма организации студентов на занятии: индивидуальная.

Методические указания.

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, то есть уравнений в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения

$a^x = a^c$, $x = c$, где $a \neq 1, a > 0$.

Пример №1. $4 \cdot 2^x = 1$

$2^2 \cdot 2^x = 2^0$

$2^{2+x} = 2^0$

$2 + x = 0$

$X = -2$

Ответ: $x = -2$.

Пример №2 $3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$x = 4$

Ответ: $x = 4$.

Пример №3Пример №**4**.

$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$

$3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 25$

$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$

Пусть $3^x = y$, тогда

$$3^x \cdot \left(3 - \frac{2}{9}\right) = 25$$

$$3^x \cdot \frac{25}{9} = 25$$

$3^x = 9$

Ответ: $x = 2$.

$3^x = 9$ $3^x = -5$-нет корней

Ответ: $x = 2$.

1 вариант

1) $5^{2x+1}=25$;

2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2-14x}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-45}$

3) $7^{x+1}-7^{x}=42$

4) $3^{2x}-4\cdot 3^{x}+3=0$

2 вариант

1) $4^{5x-6}=16$

2) $0,5^{x^2-7x+10}=1$

3) $2^{x+2}+2^{x}+2^{x+1}=28$

4) $5^{2x}-6\cdot 5^{x}+5=0$

3 вариант

1) $4\cdot 12^{2x+3}=48$

2) $3^{x+2}-3^{x+1}+3^{x}=63$

3) $\left(\frac{7}{8}\right)^{2x^2-4x}=1$

4) $4^{x}-5\cdot 2^{x}+4=0$

4 вариант

1) $10^{4x+2}=1000$

2) $5^{3x+2}+3\cdot 5^{3x}=140$

3) $0,7^{4x^3+24x^2}=1$

4) $8^{2x}-10\cdot 8^{x}+16=0$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №3: Тренажеры по теме: Число орбит

Правило произведения: пусть из некоторого конечного множества

1-й объект можно выбрать k_1 способами,

2-ой объект – k_2 способами,

n-ый объект - k_n способами. (1.1)

Тогда произвольный набор, перечисленных n объектов из данного множества можно выбрать $k_1, k_2, \ldots, k_n$ способами.

Пример 1. Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решение. В десятичной системе исчисления десять цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. На первом месте может стоять любая из девяти цифр (кроме нуля). На втором месте - любая из оставшихся 9 цифр, кроме выбранной. На последнем месте любая из оставшихся 8 цифр.

По правилу произведения $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ трёхзначных чисел имеют разные цифры.

Пример 2. Из пункта A в пункт B ведут 3 дороги, а из пункта B в пункт C – 4 дороги. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B ?

Решение. В пункте A есть 3 способа выбора дороги в пункт B , а в пункте B есть 4 способа попасть в пункт C . Согласно принципу умножения, существует $3 \times 4 = 12$ способов попасть из пункта A в пункт C .

Правило суммы: при выполнении условий (1.1), любой из объектов можно выбрать $k_1+k_2+\ldots+k_n$ способами.

Пример 3. Сколько существует способов выбора одного карандаша из коробки, содержащей 5 красных, 7 синих, 3 зеленых карандаша.
Решение. Один карандаш, по правилу суммы, можно выбрать $5+7+3 = 15$ способами.

Пример 4. Пусть из города A в город B можно добраться одним авиамаршрутом, двумя железнодорожными маршрутами и тремя автобусными маршрутами. Сколькими способами можно добраться из города A в город B ?

Решение. Все условия принципа сложения здесь выполнены, поэтому, в соответствии с этим принципом, получим $1+2+3 = 6$ способов.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий различие принципов умножения и сложения.

Пример 5. В магазине электроники продаются три марки телевизоров и два вида видеомагнитофонов. У покупателя есть возможности приобрести либо телевизор, либо видеомагнитофон. Сколькими способами он может совершить одну покупку? Сколько различных комплектов, содержащих телевизор и магнитофон, можно приобрести в этом магазине, если покупатель собирается приобрести в паре и телевизор, и видеомагнитофон?

Решение. Один телевизор можно выбрать тремя способами, а магнитофон – другими двумя способами. Тогда телевизор или магнитофон можно купить $3+2=5$ способами.

Во втором случае один телевизор можно выбрать тремя способами, после этого видеомагнитофон можно выбрать двумя способами. Следовательно, в силу принципа умножения, купить телевизор и видеомагнитофон можно $3 \times 2 = 6$ способами.

Рассмотрим теперь примеры, в которых применяются оба правила комбинаторики: и принцип умножения, и принцип сложения.

Пример 6. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает либо яблоко, либо апельсин. После чего Надя выбирает из оставшихся фруктов и яблоко и апельсин. Сколько возможно таких выборов?

Решение. Ваня может выбрать яблоко 12 способами, апельсин – 10 способами. Если Ваня выбирает яблоко, то Надя может выбрать яблоко 11 способами, а апельсин – 10 способами. Если Ваня выбирает апельсин, то Надя может выбрать яблоко 12 способами, а апельсин – 9 способами. Таким образом, Ваня и Надя могут сделать свой выбор $12 \cdot 11 \cdot 10 + 10 \cdot 12 \cdot 9 = 2400$ способами.

Пример 7. Есть 3 письма, каждое из которых можно послать по 6 адресам. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. **В данной задаче мы должны рассмотреть три случая:**

а) все письма рассылаются по разным адресам;

б) все письма посылаются по одному адресу;

в) только два письма посылаются по одному адресу.

Если все письма рассылаются по разным адресам, то число таких способов легко находится из принципа умножения: $n_1 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ способов. Если все письма посылаются по одному адресу, то таких способов будет $n_2 = 6$. Таким образом, остается рассмотреть только третий случай, когда только 2 письма посылаются по одному адресу. Выбрать какое-либо письмо мы можем 3 способами, и послать его по какому-либо выбранному адресу можем 6 способами. Оставшиеся два письма мы можем послать по оставшимся адресам 5 способами. Следовательно, послать только два письма по одному адресу мы можем $n_3 = 3 \times 6 \times 5 = 90$ способами. Таким образом, разослать 3 письма по 6 адресам в соответствие с принципом сложения можно

$n_1 + n_2 + n_3 = 120 + 6 + 90 = 216$ способами.

Обычно в комбинаторике рассматривается идеализированный эксперимент по выбору наудачу k элементов из n. При этом элементы: а) не возвращаются обратно (схема выбора без возвращений); б) возвращаются обратно (схема выбора с возвращением).

1 вариант

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?

1) 30 2) 100 3) 120 4) 5

2. В 9«Б» классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

1) 128 2) 35960 3) 36 4)46788

3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

1) 10 2) 60 3) 20 4) 30

4. Вычислить: 6! -5!

1) 600 2) 300 3) 1 4) 1000

5. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?

1) $\frac{17}{45}$ 2) $\frac{17}{43}$ 3) $\frac{43}{45}$ 4) $\frac{17}{45}$

6. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?

1) $\frac{3}{2}$ 2) 0,5 3) 0,125 4) $\frac{1}{3}$

7. В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?

1) 0,02 2) 0,00012 3) 0,0008 4) 0,002

2 вариант

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

1) 100 2) 30 3) 5 4) 120

2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?

1) 3 2) 6 3) 2 4) 1

3. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков.

1) 10000 2) 60480 3) 56 4) 39450

4. Вычислите: $\frac{8!}{6!}$

1) 2 2) 56 3) 30 4) $\frac{4}{3}$

5. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?

1) $\frac{1}{36}$ 2) $\frac{1}{35}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{36}{4}$

6. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

1) 0,25 2) $\frac{2}{6}$ 3) 0,5 4) 0,125

7. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?

1) 0,5 2) 0,4 3) 0,04 4) 0,8

3 вариант

1. Сколькими способами можно расставить 4 различные книги на книжной полке?

1) 24 2) 4 3) 16 4) 20

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

1) 30 2) 21 3) 14 4) 7

3. В футбольной команде 11 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

1) 22 2) 11 3) 150 4) 110

4. Сократите дробь: $\frac{n!}{(n+1)!}$

1) 1 2) $\frac{n}{n+1}$ 3) $\frac{1}{n+1}$ 4) $\frac{2}{n+1}$

5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

1) $\frac{1}{6}$ 2) 0,5 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0,25

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

1) 0,25 2) 0, 4 3) 0,48 4) 0,2

7. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

1) 0,8 2) 0,1 3) 0,015 4) 0,35

4 вариант

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 5 человек?

1) 5 2) 120 3) 25 4) 100

2. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

1) 12650 2) 100 3) 75 4)10000

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры. Которых нечетные и различные.

1) 120 2) 30 3) 50 4) 60

4. Упростите выражение: $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

1) 0,5 2) $\frac{n+1}{n-2}$ 3) n^3-n 4) n^2 -1

5. Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

1) $\frac{7}{30}$ 2) $\frac{7}{12}$ 3) $\frac{7}{31}$ 4) $\frac{7}{365}$

6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

1) 0,504 2) 0,006 3) 0,5 4) 0,3

7. Из 30 учеников спорткласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

1) $\frac{17}{30}$ 2) 0,5 3) $\frac{28}{30}$ 4) $\frac{14}{30}$

Ключи:

Вариант 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	2	4	1	2	3	4

Вариант 2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	4	1	2	2	3	1	1

Вариант 3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

Вариант 4

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	1	4	3	2	1	1

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 5-6 заданий
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 4 заданий

Практическая работа №4: Тренажеры по теме: Комбинаторные конструкции

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются перестановки, размещения и сочетания. При этом необходимо учитывать, есть ли среди рассматриваемых элементов повторяющиеся.

Определение**.** ***Перестановкой из n элементов*** называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке.

Если среди элементов нет одинаковых, то ***число перестановок*** из n элементов обозначают символом P_n («пэ из эн») и вычисляют по формуле:

$\mathbf{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n}$.

Для произведения первых n натуральных чисел есть специальное обозначение ***n!*** («эн факториал»). При этом 0! принимается за единицу, то есть 0! = 1.

Пример 1. 5! = 1×2×3×4×5 = 120.

Пример 2. Сколькими способами можно расставить 6 бегунов и 6 беговых дорожках?

Число способов, очевидно, равно числу перестановок из 6 элементов:

$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Если среди n элементов есть повторяющиеся, то число перестановок из n элементов обозначают символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ (***перестановки с повторениями***) и вычисляют по формуле:

$$P_n(n_1; n_2; \ldots; n_s) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_s!}$$

Здесь $n_1, n_2, \ldots, n_s$ – количество одинаковых элементов по группам.

Определение. ***Размещением из n элементов по k*** ($k £ n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определённом порядке из данных n элементов.

Если один и тот же элемент нельзя брать более одного раза, то ***число размещений*** из n элементов по k обозначают A_n^k («а из эн по ка») и вычисляют по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1).$$

Заметим, что $A_n^n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - (n - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_n$.

Пример. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нём было 4 различных предмета?

Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо самыми предметами, либо порядком их следования, то есть важен и порядок, и сами элементы, - это размещения: $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Если один и тот же элемент можно использовать более одного раза, то число размещений из n элементов по k обозначают $\bar{A}_s^k$ (***размещение с повторениями***) и вычисляют по формуле: $\bar{A}_s^k = s^k$. Здесь s – количество различных элементов среди nэлементов.

Определение. ***Сочетанием из n элементов по k*** называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов. Здесь не важен порядок следования элементов, в отличие от размещений и перестановок.

Если среди данных n элементов нет одинаковых, то ***число сочетаний*** из n элементов по k обозначают C_n^k («цэ из эн по ка») и вычисляют по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Заметим, что ***связь между сочетаниями, размещениями и перестановками*** выражается формулой

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} \text{ или } A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

Пример. Из 12 членов группы надо выбрать трёх для поездки в магазин. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, что здесь важны только сами элементы (конкретные люди), следовательно, это сочетания: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$.

Если среди n элементов есть повторяющиеся, то число сочетаний обозначают $\overline{C}_s^k$ (***сочетания с повторениями***) и вычисляют по формуле: $\overline{C}_s^k = C_{s+k-1}^k$.Здесь s – количество различных элементов среди n элементов.

1 вариант

1. Вычислите:

$а)\ \dfrac{P_4}{P_8} \cdot A_8^4;\quad в)\ \dfrac{P_{20}}{A_{20}^{15}} - \dfrac{A_{20}^5}{C_{20}^5};$

$б)\ C_8^6 \cdot P_{2;}\quad г)\ C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1.$

2. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 6 различных уроков?
3. Сколькими способами из 7 членов президиума собрания можно выбрать председателя, его заместителя и секретаря?
4. Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестерку?
5. Решите уравнение: $A_{x+1}^2 = 20.$

2 вариант

1. Вычислите:

$а)\ \dfrac{P_5}{P_9} \cdot A_9^5;\quad в)\ \dfrac{P_{14}}{A_{14}^{10}} - \dfrac{A_{14}^4}{C_{14}^4};$

$б)\ C_{10}^7 \cdot P_3;\quad г)\ C_6^4 C_5^3 - C_5^3 C_4^2.$

2. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в одном числе не должны повторяться)?
3. Сколькими способами из 9 учебных предметов модно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков?
4. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?
5. Решите уравнение: $C_x^{x-1} \cdot (x-1) = 30.$

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №5: Тренажеры по теме: Правила комбинаторики

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух **основных правил** - правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, то выбор "либо A, либо B" можно осуществить $n+m$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) m способами, то пары объектов A и B можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пусть A = {a_1, a_2, ..., a_n}, B = {b_1, b_2, ..., b_m} и $|A|$ - число элементов множества A. Составим декартово произведение $A \times B$ множеств A и B, т.е. множество пар (a_i, b_i).

$$a_i \in A, b_i \in B : A \times B = \begin{array}{l} \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),...,(a_1,b_m), \\ (a_2,b_1),(a_2,b_2),...,(a_2,b_m), \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (a_n,b_1),(a_2,b_n),...,(a_n,b_m)\}. \end{array}$$

Тогда правило произведения записывается следующим образом:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Пример 6. Сколько существует двузначных чисел?

Решение. Поскольку в двузначном числе цифра, обозначающая число десятков, должна быть отлична от нуля, то A = {1, 2, ..., 9}, B = {0, 1, 2, ..., 9} и $A \times B = \{10, 11, ..., 19, ..., 90, 91, ..., 99\}, |A \times B| = |A| \cdot |B| = 90.$

Выборки элементов без повторений

Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначим A_n^m. Используя основное правило комбинаторики, получаем

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Если $m = n$, то A_n^n - число таких размещений, которые отличаются только порядком расположения элементов. Такие размещения называются **перестановками**. Их число P_n находится по формуле

$$P_n = A_n^n = n!$$

Выборки из m элементов, взятых из данных n, отличающихся только составом элементов, называются **сочетаниями** из n элементов по m. Число C_n^m таких сочетаний находится

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 7. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, немецкого, французского, испанского - на любой другой из этих пяти языков?

Решение. Поскольку важен порядок, с какого языка задается перевод надругой, то для ответа на вопрос необходимо найти число размещений из пяти по два.

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (словарей)}.$$

Пример 8. В соревнованиях на первенство университета по волейболу участвуют 8 команд. Насколько более продолжительным будет турнир, организованный по круговой системе, чем по олимпийской?

Решение. При проведении турнира по круговой системе каждый участник встречался с каждым и порядок их вхождения в пару не важен. Следовательно, по круговой системе потребуется провести $C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ встреч, а по олимпийской только - 7 (четыре встречи в $1/4$ финала, две - в полуфинале и одна в финале).

Выборки элементов с повторениями

В данных выборках допускается повторение элементов, что является достаточно естественным (например, в телефонных и автомобильных номерах возможно использование одной цифры несколько раз).

Число **размещений** из n элементов по m с повторениями обозначается $\bar{A}_n^m$ и находится как

$$\bar{A}_n^m = n^m.$$

Число **перестановок** $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$, в которых 1-й элемент повторяется m_1 раз, 2-й - m_2 раз, а k-й - m_k раз, находится следующим образом:

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)!}{m_1! m_2! \ldots m_k!}.$$

Пример 9. Сколько "слов" можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?

Решение. Заметим, что если бы все буквы были различны, то получили бы P_{10} новых "слов", но буква "М" употребляется в "слове" 2 раза, "А" - 3 раза, "Т" - 2 раза, оставшиеся три буквы - по разу. Следовательно, искомое число будет в $P_2 \cdot P_3 \cdot P_2$ раз меньше, чем P_{10}, и равно

$$P_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

Число **сочетаний** с повторениями $\bar{C}_n^m$ из n элементов по m выражается через число сочетаний без повторений:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Пример 10. В кафе в продаже имеются 5 сортов пирожных. Сколькими способами 8 студенток могут заказать себе по одному пирожному?

Решение. Зашифруем каждую покупку 8 пирожных единицами по 5 сортам, разделяя сорта нулями. Тогда каждой покупке будет соответствовать упорядоченный набор из 8 единиц и 4 (= 5 - 1) разделительных нулей, а общее число покупок будет соответствовать числу перестановок этих нулей и единиц $P_{8,4}$. Таким образом,

$$\bar{C}_5^8 = P_{8,4} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495 = C_{5+8-1}^8.$$

Вариант 1

1. Сколько различных трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр: 2, 5, 7, 8, 9?
2. Сколько различных трехзначных чисел составить из цифр: 0, 2, 5, 7, 8, 9?
3. В классе 15 девочек и 17 мальчиков. Сколько существует способов выбора одного ведущего для школьного праздника?
4. У Оли 3 куклы и 4 плюшевых медведя. Сколько способов выбора одной игрушки есть у Оли?
5. В столовой есть 3 вида первого блюда, 5 видов второго блюда и 3 вида компота. Сколько существует вариантов обеда для студента, если обычно он покупает первое, второе и компот?
6. Сколькими способами могут занять очередь в кассу 5 человек?
7. На клумбе расцвели 15 красных, 10 белых, 12 розовых роз. Сколько существует способов составить букет из трех роз разного цвета?
8. В классе 20 учащихся. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя старосты в этом классе?
9. Из 25 членов туристической группы 10 человек владеют английским языком, 8- немецким, а остальные- французским. Сколько существует способов выбора делегации из трех туристов так , чтобы они владели тремя языками?
10. Сколько существует нечетных трехзначных чисел, составленных из цифр 5, 6, 7, 9?

Вариант 2

1. Сколько различных трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр: 1, 2, 3, 4, 5?
2. Сколько различных трехзначных чисел составить из цифр: 0, 1, 3, 5, 7, 9?
3. В классе 12 девочек и 5 мальчиков. Сколько существует способов выбора пары ведущих (разнополой) для школьного праздника?
4. У Юли 7 пупсиков и 5 плюшевых медведя. Сколько способов выбора одной игрушки есть у Юли?
5. В столовой есть 4 вида первого блюда, 6 видов второго блюда и 2 вида компота. Сколько существует вариантов обеда для студента, если обычно он покупает первое, второе и компот?

6. Сколькими способами могут занять очередь в кассу 6 человек?
7. На клумбе расцвели 8 красных, 10 белых, 14 розовых роз. Сколько существует способов составить букет из трех роз разного цвета?
8. В классе 25 учащихся. Сколькими способами можно выбрать старосту и физорга в этом классе?
9. Из 20 членов туристической группы 15 человек владеют английским языком, 3 — немецким, а остальные- французским. Сколько существует способов выбора делегации из трех туристов так , чтобы они владели тремя языками?
10. Сколько существует четных трехзначных чисел, составленных из цифр 4, 6, 7, 9, 0?

Вариант 3

1. Сколько различных двухзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр: 2, 5, 7, 8, 9?
2. Сколько различных трехзначных чисел составить из цифр: 0, 1, 2, 5, 7, 8, 9?
3. В классе 11 девочек и 17 мальчиков. Сколько существует способов выбора одного ведущего для школьного праздника?
4. У Оли 22 куклы и 4 плюшевых медведя. Сколько способов выбора одной игрушки есть у Оли?
5. В столовой есть 5 видов первого блюда, 5 видов второго блюда и 2 вида компота. Сколько существует вариантов обеда для студента, если обычно он покупает первое, второе и компот?
6. Сколькими способами могут занять очередь в кассу 4 человека?
7. На клумбе расцвели 11 красных, 8 белых, 15 розовых роз. Сколько существует способов составить букет из трех роз разного цвета?
8. В классе 18 учащихся. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя старосты в этом классе?
9. Из 30 членов туристической группы 10 человек владеют английским языком, 12 — немецким, а остальные- французским. Сколько существует способов выбора делегации из трех туристов так , чтобы они владели тремя языками?
10. Сколько существует нечетных трехзначных чисел, составленных из цифр 2, 5, 6, 8, 9?

Вариант 4

1. Сколько различных двухзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр: 1, 2, 3, 4, 5?
2. Сколько различных трехзначных чисел составить из цифр: 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9?
3. В классе 15 девочек и 5 мальчиков. Сколько существует способов выбора пары ведущих (разнополой) для школьного праздника?
4. У Юли 9 пупсиков и 8 плюшевых медведя. Сколько способов выбора одной игрушки есть у Юли?
5. В столовой есть 2 вида первого блюда, 7 видов второго блюда и 3 вида компота. Сколько существует вариантов обеда для студента, если обычно он покупает первое, второе и компот?
6. Сколькими способами могут занять очередь в кассу 7 человек?
7. На клумбе расцвели 18 красных, 6 белых, 8 розовых роз. Сколько существует способов составить букет из трех роз разного цвета?
8. В классе 24 учащихся. Сколькими способами можно выбрать старосту и физорга в этом классе?
9. Из 20 членов туристической группы 5 человек владеют английским языком, 3 — немецким, а остальные- французским. Сколько существует способов выбора делегации из трех туристов так , чтобы они владели тремя языками?
10. Сколько существует четных трехзначных чисел, составленных из цифр 4, 6, 8, 9, 0?

Ответы:				
№ п/п	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1.	60	60	20	25
2.	180	180	294	294
3.	32	60	28	75
4.	7	12	26	17
5.	45	48	50	42
6.	120	720	24	840
7.	1800	1120	1320	864
8.	380	600	306	552
9.	560	90	960	180
10.	32	60	25	80

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Правильно выполнены любые 9-10 заданий
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 7-8 заданий
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 5-6 заданий
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 5 заданий

Практическая работа №6 Тренажеры по теме: Тригонометрические операции

Форма организации студентов на занятии: фронтальная.

Методические указания.

I. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

II. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

III. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

IV. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

V. $\cos 2\alpha = cos^2 \propto - sin^2 \propto$

VI. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

VII. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

VIII. $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

IX. $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$

ПРИМЕР №1.

Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2cos^2\propto} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$

ПРИМЕР №2

Вычислите

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{8}}{1+tg^2\frac{\pi}{8}}=\frac{2\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{cos^2\frac{\pi}{8}}}=2\sqrt{2}tg\frac{\pi}{8}\cdot cos^2\frac{\pi}{8}=2\sqrt{2}\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cdot cos^2\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

1 вариант

1. Найти значение выражения:
   а) $\cos107^0\cdot\cos17^0+\sin107^0\cdot\sin17^0$;
   б) $\cos 36^0\cdot\cos 24^0-\sin 36^0\cdot\sin 24^0$;
   в) $\sin 63^0\cdot\cos 27^0+\cos63^0\cdot\sin 27^0$;
   г) $\sin51^0\cdot\cos 21^0-\cos 51^0\cdot\sin 21^0$.
2. Вычислите6

а)$\sin(-\frac{\pi}{3})$;

б)$tg(-\frac{\pi}{4})$;

в)$\cos240^0$;

г)$ctg315^0$;

д)$\sin\frac{4\pi}{3}$;

е)$tg\frac{5\pi}{6}$;

ж)$\sin 690^0$;

з)$tg660^0$;

2 вариант

1. Найдите значение выражения:
   а) $\sin 63^0\cdot\cos 27^0+\cos63^0\cdot\sin 27^0$;
   б) $\sin51^0\cdot\cos 21^0-\cos 51^0\cdot\sin 21^0$.
   в) $\cos\frac{5\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}$;
   г) $\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.
2. Вычислить:

а)$\cos(-\frac{\pi}{4})$;

б)$ctg(-\frac{\pi}{6})$;

в)$\sin330^0$;

г)$tg150^0$;

д)$ctg\frac{2\pi}{3}$;

е)$\cos\frac{7\pi}{6}$;

ж)$\sin 1020^0$;

з)$ctg390^0$;

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**

«Отлично»	Допущена одна ошибка в одном из пунктов
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 8-10 заданий
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 5-7 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 5 заданий

Практическая работа №7 Тренажеры по теме: Преобразование тригонометрических выражений

Цель: отработка навыков решения упражнений натригонометрические тождества.

Форма организации студентов на занятии: индивидуальная.

Методические указания.

I. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

II. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

III. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

IV. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

V. $\cos 2\alpha = cos^2 \propto - sin^2 \propto$

VI. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

VII. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

VIII. $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

IX. $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$

ПРИМЕР №1.

Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2cos^2\propto} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$

ПРИМЕР №2

Вычислите

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{8}}{1+tg^2\frac{\pi}{8}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{cos^2\frac{\pi}{8}}} = 2\sqrt{2}tg\frac{\pi}{8}\cdot cos^2\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2}\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cdot cos^2\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

1 вариант

1. Упростите выражения:
   a) $5\sin^2\alpha - 0{,}61 + 5\cos^2\alpha.$
   b) $\dfrac{\cos x - 1}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x + 1}{\sin x}.$
   c) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{1+\sin x}.$
   d) $tg^2\alpha : (1-\cos^2\alpha).$
2. Вычислите:
   a) $\sin 0 + \cos\dfrac{\pi}{2} + \sin^2\dfrac{\pi}{4}.$
   b) $3\sin\dfrac{\pi}{6} + 2\cos\pi + ctg^2\dfrac{\pi}{6}.$
3. Найдите значение других трех основных тригонометрических функций, если:
   $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}, \quad \dfrac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \pi.$

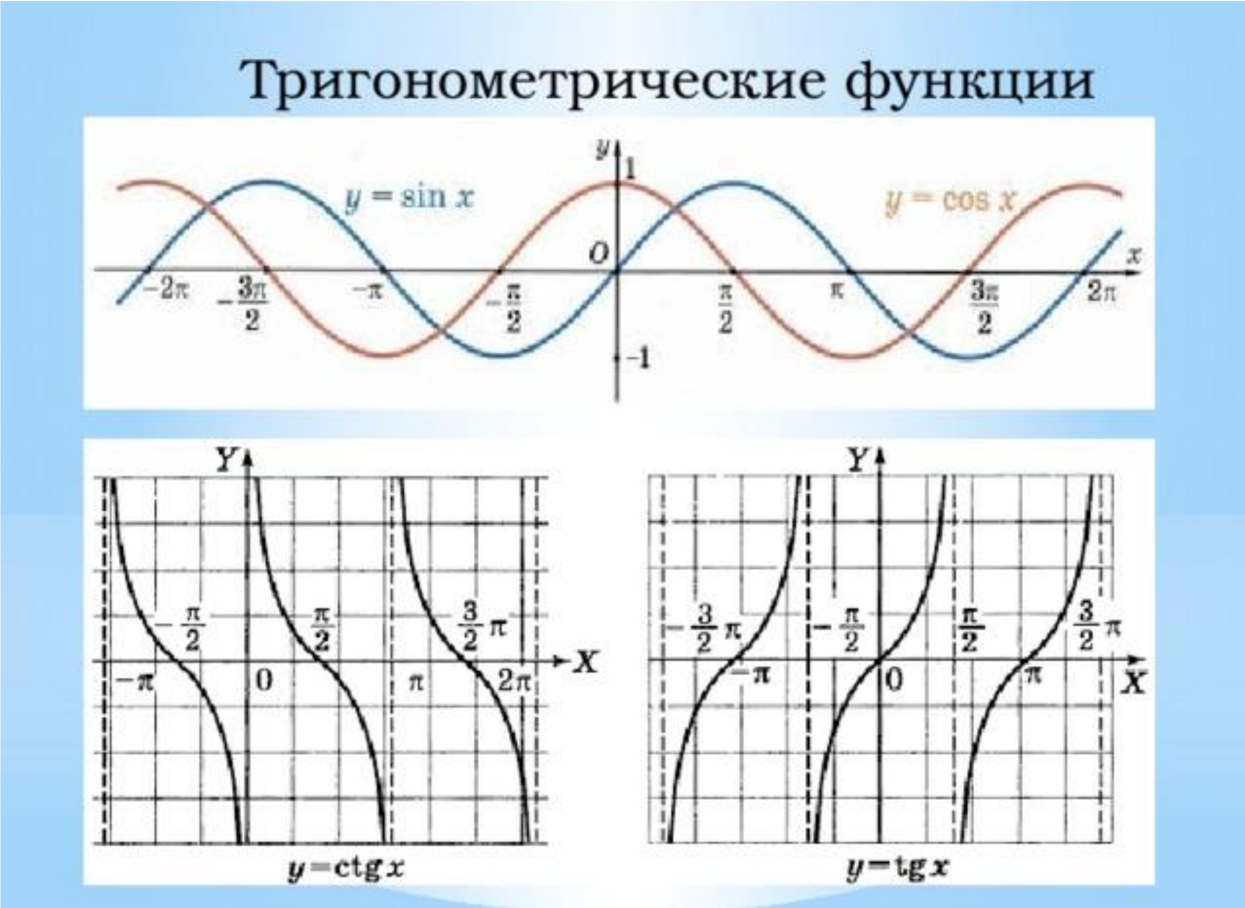
2 вариант

1. Упростите выражения:
   a) $3\cos^2\alpha - 6 + 3\sin^2\alpha.$
   b) $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x + 1}{\cos x}.$
   c) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{1-\cos x}.$
   d) $ctg^2\alpha : (1-\sin^2\alpha).$
2. Вычислите:
   a) $6\sin\dfrac{\pi}{6} - 2\cos 0 - tg^2\dfrac{\pi}{3}.$
   b) $3tg\dfrac{\pi}{4} - \sin^2\dfrac{\pi}{3} + \cos^2\dfrac{\pi}{6}.$
3. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:
   $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}, \quad 0 \prec \alpha \prec \dfrac{\pi}{2}.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 5-6 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3-4 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №8 Тренажеры по теме: Тригонометрические функции



1 вариант

Постройте в одной системе координат следующие графики функций:

a)
$$y = \sin x$$
$$y = \sin x - 2$$
$$y = \sin x + 2$$
$$y = 2\sin x$$
$$y = \frac{1}{2}\sin x$$

b)
$$y = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right) \\ ctgx, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

2 вариант

Постройте в одной системе координат следующие графики функций:

$y = \cos x$

$y = \cos x - 3$

а) $y = \cos x + 3$

$y = 3\cos x$

$y = \frac{1}{3}\cos x$

b) $y = \begin{cases} \sin x, & x \in (-\infty;0] \\ tgx, & x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Допущена одна не значительная ошибка при построении одного графика
«Удовлетворительно»	Допущено не более двух ошибок при построении графиков
«Неудовлетворительно»	Допущено более двух ошибок при построении графиков

Практическая работа №9 Тренажеры по теме: Тригонометрические уравнения

Цель: отработка навыковрешения упражнений натригонометрические уравнения.

Форма организации студентов на занятии: фронтальная.

Методические указания.

Формула	***примеры***
$\sin x = a$, ***не имеет решений при*** $\lvert a \rvert > 1$ ***и имеет бесконечное*** ***множество решений при*** $\lvert a \rvert < 1$ ***, которые находятся по формуле*** $x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, n\epsilon z$	***1)*** $\sin x = 1{,}2$ ***Не имеет решения*** ***2)***
$\cos x = a$, ***не имеет решений при*** $\lvert a \rvert > 1$ ***и имеет бесконечное*** ***множество решений при*** $\lvert a \rvert < 1$ ***, которые находятся по формуле*** $x = \pm arccosa + 2\pi n, n\epsilon z$	***1)*** $\cos x = -1{,}01$ ***Не имеет решения***

$tgx = a$ ***имеет решение при любом действительном значении a, оно находится по формуле*** $x = arctga + \pi n, n \epsilon z$ $arctg(-a) = -arctga$ $arcctg(-a) = \pi - arcctga$	$tgx = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon z$

1 вариант

1. Найдите значение выражения:

$$2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2. Решите уравнение:

1) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2) $2 \cdot tg^2 x - tgx - 3 = 0$

3) $\sin 3x - \sin 5x = 0$

3. Решите неравенство :

$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 вариант

1. Найдите значение выражения:

$$4 \cdot \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \arcsin(-1)$$

2. Решите уравнение:

1) $tg\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

2) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$

3) $\cos x + \cos 5x = 0$

3. Решите неравенство

$$\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3 вариант

1. Найдите значение выражения:

$$4 \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 \cdot arctg\left(-\sqrt{3}\right)$$

2. Решите уравнение:

1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

2) $\mathrm{tg}^2 x - tgx - 12 = 0$

3) $\sqrt{3} \cdot \sin\ x - \cos x = 0$

3. Решите неравенство :

$$\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4 вариант

1. Найдите значение выражения:

$$6 \cdot \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

2. Решите уравнение:

1) $\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $6 \cdot \cos^2 x + 7 \cdot \cos x - 3 = 0$

3) $tg^2 x - tg\ x = 0$

3. Решите неравенство :

$\mathrm{tg}\ x \le -1$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4-5 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №10 по теме: Формулы дифференцирования

Формулы дифференцирования

$$C' = 0$$

$$(kx)' = k$$

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x\sqrt{x})' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

03.10.2015

3

1 вариант

Используя формулы дифференцирования найдите производную функций в точке x_0 :

а) $f(x) = x^3, \quad x_0 = 2; -1{,}5;$

б) $f(x) = 4 - 2x, \quad x_0 = 0{,}5; -3;$

в) $f(x) = 3x - 2, \quad x_0 = 5; -2;$

г) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 2{,}5; -1.$

2 вариант

Используя формулы дифференцирования найдите производную функций в точке x_0 :

а) $f(x) = x^4, \quad x_0 = 2; -1{,}5;$

б) $f(x) = 2 - 4x, \quad x_0 = 0{,}5; -3;$

в) $f(x) = 2x + 3, \quad x_0 = 5; -2;$

г) $f(x) = x^3, \quad x_0 = 2{,}5; -1.$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания

«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №11 Тренажеры по теме: Производные элементарных функций

Формулы дифференцирования

$$C' = 0$$

$$(kx)' = k$$

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x\sqrt{x})' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

03.10.2015 3

1 вариант

Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

1) $y = x^9$; 7) $y = x^{-21}$;

2) $y = x^{-13}$; 8) $y = x^6$;

3) $y = \frac{1}{x^4}$; 9) $y = -8x + 11$;

4) $y = 4x + 16$; 10) $y = \frac{1}{x^{-5}}$;

5) $y = 32 - 9x$; 11) $y = 43 - 5x$;

6) $y = -\frac{x}{7} - 41$. 12) $y = 31 - \frac{x}{12}$.

2 вариант

Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

1) $y = x^{24}$;

2) $y = x^{-21}$;

3) $y = \frac{1}{x^8}$;

4) $y = 11x - 9$;

5) $y = -51 - 6x$;

6) $y = -\frac{x}{13} + 5$.

7) $y = x^{-31}$;

8) $y = x^{16}$;

9) $y = -14x - 32$;

10) $y = -19 + 7x$;

11) $y = \frac{1}{x^{-8}}$;

12) $y = -28 - \frac{x}{18}$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Правильно выполнены любые 11-12 заданий
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 8-10 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 5-7 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 5 заданий

Практическая работа №12 Тренажеры по теме: Применение производной к исследованию функций

Определение: Точка x_0 называется точкой максимума, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) > f(x)$.
Определение: Точка x_0 называется точкой минимума, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) < f(x)$.
Точки минимума и максимума функции называются **точками экстремума функции**.
Точки, в которых производная равна нулю или не существует называются **критическими точками**.
Справедлива теоремы.
Теорема: Если x_0 – точка экстремума, то производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x) = 0$.
Теорема:
Если в окрестности критической точки $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.
Правило нахождения экстремумов функции y = f(x) с помощью производной

1. Найти производную функции $f'(x)$.
2. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует.
3. Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции f(x).
   Если на промежутке $f'(x) < 0$, то на этом промежутке функция убывает; если на промежутке $f'(x) > 0$, то на этом промежутке функция возрастает.
4. Если в окрестности критической точки $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.
5. Определить точки минимума и максимума и записать ответ.
   С помощью приведенного алгоритма можно найти не только экстремумы функции, но и промежутки возрастания и убывания функции.
   ПРИМЕР:

Найти промежутки возрастания и убывания; точки экстремума функции: $f(x) = x^3 - 3x^2$.
Решение:
Найдем производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
Найдем критические точки , решив уравнение $3x^2 - 6x = 0$;
$3x(x-2) = 0$
$x = 0$, $x = 2$
Исследуем поведение производной в критических точках и на промежутках между ними.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	т. max 0	↘	т. min -4	↗

Ответ: Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

функция убывает при $x \in (0; 2)$

точка минимума функции $x = 2$; точка максимума функции $x = 0$.

1. **Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке [a;b].**

Запишем алгоритм, позволяющий находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1. Находим область определения функции и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок [a;b].
2. Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке [a;b]
3. Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок [a;b]. Для этого, находим производную функции, приравниваем ее к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни.
4. Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при x=a и x=b.
5. Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Разберем алгоритм при решении примера на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

на отрезке [1;4];

Решение.

Областью определения функции является все множество действительных чисел, за исключением нуля, то есть $D(y): \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Оба отрезка попадают в область определения.

Находим производную функции по правилу дифференцирования дроби:

$$y' = \left(\frac{x^3 + 4}{x^2}\right)' = \frac{(x^3 + 4)' \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot (x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

Очевидно, производная функции существует во всех точках отрезков [1;4] и [-4;-1].

Стационарные точки определим из уравнения $\frac{x^3-8}{x^3}=0$. Единственным действительным корнем является x=2. Эта стационарная точка попадает в отрезок [1;4].

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в стационарной точке, то есть при x=1, x=2 и x=4:

$$y(1)=\frac{1^3+4}{1^2}=5$$

$$y(2)=\frac{2^3+4}{2^2}=3$$

$$y(4)=\frac{4^3+4}{4^2}=4\frac{1}{4}$$

Следовательно, наибольшее значение функции $\max\limits_{x\in[1;\,4]} y=y(1)=5$, а наименьшее значение $\min\limits_{x\in[1;\,4]} y=y(2)=3$

Применение производной к построению графиков функции

При исследовании свойств функции необходимо найти:

1) область ее определения;

2) производную;

3) стационарные точки;

4) промежутки возрастания и убывания;

5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Пример: Построить график функции

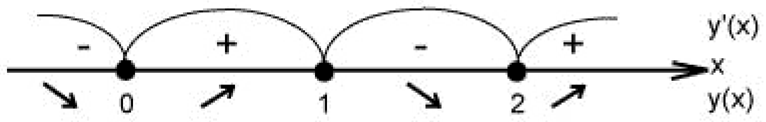
$y=x^2(x-2)^2$.

Решение.

1. Областью определения функции является **все действительные числа**
2. Найдём производную функции $y'=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)=4x(x-2)(x-1)$
3. Найдём критические точки, в которых производная равна нулю. $y'=0$

   Это точки x = 0, x = 2, x = 1

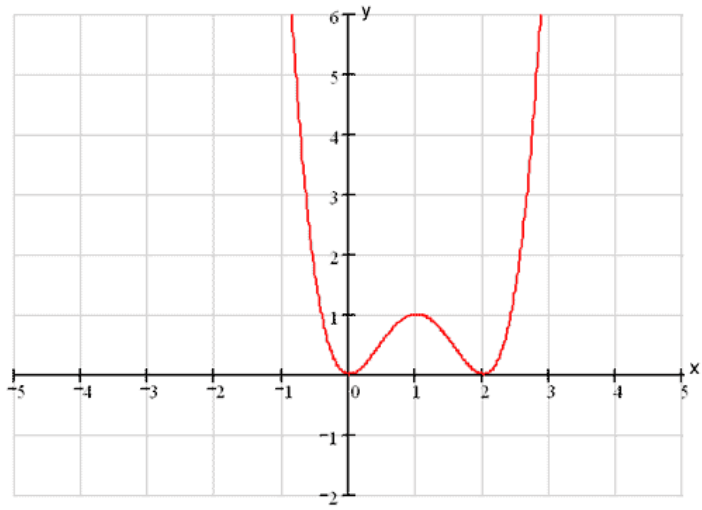
4) Отметим эти точки на числовой оси и определим знак производной на интервалах.



Таким образом: $x=0$ - точка минимума; $x=1$ - точка максимума; $x=2$ - точка минимума.

$y(0)=0,\ y(1)=1,\ y(2)=0$.

5) Строим график на основании проделанного исследования

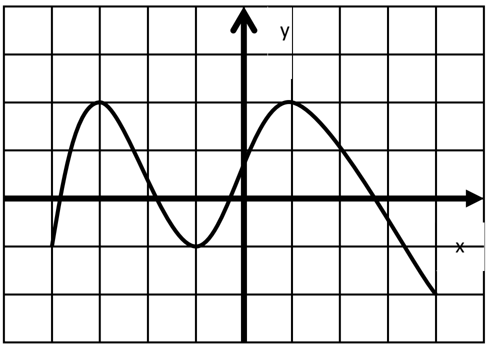


1 вариант

1.Определить промежутки возрастания и убывания функции y=f(x), используя данные о её производной $f'(x)$ (см. таблицу)

x	(-∞; -8)	-8	(-8;0)	0	(0;8)	8	(8;∞)
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

2. По графику функции найдите точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение функции.



3. Найти промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

$f(x) = x^3+x^2+16$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

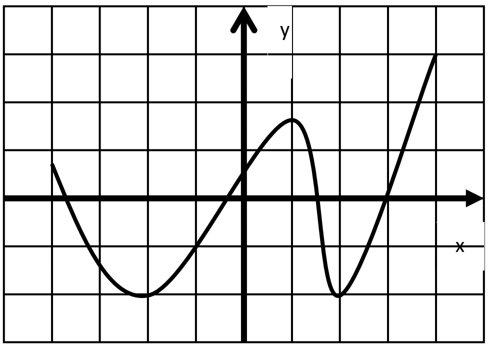
$f(x) = x^4-2x^2+3$ на отрезке [-4;3]

2 вариант

1. Укажите точки максимума и точки минимума функции y=f(x), если данные о её производной $f'(x)$ указаны в таблице:

x	**(-∞; -1)**	**-1**	**(-1;0)**	**0**	**(0;3)**	**3**	**(3;6)**	**6**	**(6;∞)**
$f'(x)$	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**

2. По графику функции найдите промежутки, при которых f'(x)>0. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.



3. Найти промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

$f(x) =x^3 +4x^2-37$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

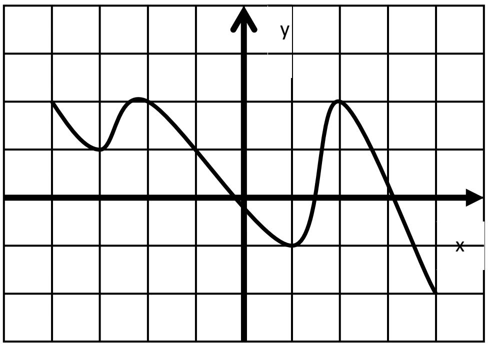
$f(x) = x^4–8x^2 +5$ на отрезке [-3;2]

3 вариант

1. Определить промежутки возрастания функции y=f(x), используя данные о её производной $f'(x)$ (см. таблицу)

x	**(-∞; 7)**	**7**	**(7;6)**	**6**	**(6;25)**	**25**	**(25;∞)**
$f'(x)$	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**

2. По графику функции найдите точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение функции.



3. Найти промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

$f(x) = 2x^4 – 4x^2 + 15$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

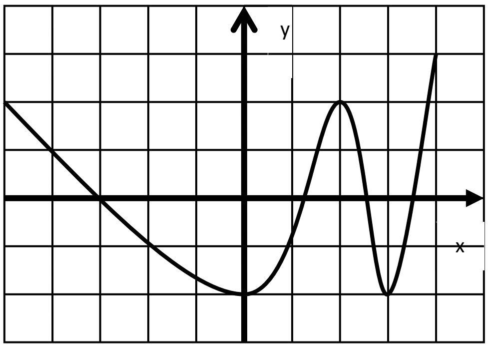
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке [-2;2]

4 вариант

1. Укажите точки максимума и точки минимума функции y=f(x), если данные о её производной $f'(x)$ указаны в таблице:

x	**(-∞; -2,5)**	**-2,5**	**(-2,5;0)**	**0**	**(0;10)**	**10**	**(10;∞)**
$f'(x)$	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**

2. По графику функции найдите промежутки, при которых f'(x)<0. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.



3. Найти промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

$f(x) = x^4 – 8x^2$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на отрезке [-4;0]

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №13 Тренажеры по теме: Прикладные задачи

<u>Задача о силе электрического тока.</u>

Пусть q=q(t)-количество электричества (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника за время t; количество электричества есть функция времени. Для определения скорости изменения количества электричества с течением времени пользуются понятием силы тока. Обозначим Δq количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени Δt от момента t до момента t+Δt.

Отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется средней силой тока за время от t до t+Δt и обозначается $J_{ср}$. В случае постоянного тока $J_{ср}$ будет постоянной. Если в цепи переменный ток, то $J_{ср}$ будет различна для различных промежутков времени. Поэтому для цепи переменного тока вводят понятие силы тока J в данный момент времени t, определив ее как предел средней силы тока за промежуток времени от t до t+Δt, если Δt→0.

$$J=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}, \text{ т.е. } J(t)=q'(t).$$

<u>Задача о скорости химической реакции.</u>

Пусть дана функция m=m(t), где m - количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ -средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т.е. $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}$ есть скорость химической реакции в данный момент времени t,V=m′(t).

Из рассмотренных выше задач, приводящих к понятию производной, следует несколько выводов:

1. Скорость прямолинейного движения есть производная пути S=S(t) по времени t, т.е. V=S′(аналогично ускорение есть производная скорости a=V′). В этом состоит механический смысл производной.
2. Скорость химической реакции есть производная количества веществаm=m(t) по времени t, т.е. V=m′(t).
3. Скорость роста популяции есть производная размера популяции p=p(t) по времени t, т.е. V=p′(t).
4. Скорость роста численности населения есть производная от количества населения A=A(t) по времени t, т.е. V=A′(t).
5. Сила переменного тока J есть производная количества электричества q=q(t) по времени t, т.е. J =q′(t).

6. Угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в точке с абсциссой x_0есть производная $f'(x_0)$. В этом состоит геометрический смысл производной.
7. Производительность труда f(t) есть производная от выработки продукцииF(t) по времени t, т.е. f(t)=F′(t).

Примеры.

I. Если популяция в момент времени t насчитывает $p(t)=3000+100t^2$ особей (tизмеряется в часах), то скорость роста популяции есть p′(t)=200t.
Скорость роста популяции увеличивается со временем.
Если t=5, то скорость роста составляет p′(5)=200·5=1000 особей в час.
Если t=10, то p′(10)=200·10=2000 особей в час.

II. Ракета при движении совершает колебательное движение вокруг своей оси по закону $\alpha(t)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+3t\right)$. Найти угловую скорость и ускорение движения в момент времени $t_0=\frac{\pi}{2}c$. Дать характеристику движения.

Решение: $\omega(t)=\alpha'(t)=12\cos\left(\frac{\pi}{6}+3t\right)$

$\omega(t_0)=12\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)=12\sin\frac{\pi}{6}=6$ (рад/с)

ε$(t)=\omega'(t)=-36\sin\left(\frac{\pi}{6}+3t\right)$

ε$(t_0)=-36\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)=36\cos\frac{\pi}{6}=36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$ (рад/с^2)

$\omega(t)\neq const, \varepsilon(t)\neq const$ неравномерное движение

Ответ: $\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$=6 рад/с, ε$\left(\frac{\pi}{2}\right)$=18 $\sqrt{3}$ рад/с^2.

III. Пуля, попадая в твердое тело, движется в нем по закону S(t)= $\frac{1}{k}$ ln(1+kV_0t), где V_0 - скорость, с которой пуля входит в тело, k – постоянная положительная величина.
Решение: V(t)=S′(t)

V(t)=$\left(\frac{1}{k}\ln(1+kV_0t)\right)'=\frac{kV_0}{k(1+kV_0t)}=\frac{V_0}{1+kV_0t}$

$$a(t)=V'(t), a(t)=\left(\frac{V_0}{1+kV_0t}\right)'=-\frac{kV_0\cdot V_0}{(1+kV_0t)^2}=-k\cdot\left(\frac{V_0}{1+kV_0t}\right)^2=-k\cdot V^2$$

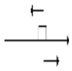
Ответ: *V*=$\frac{V_0}{1+kV_0t}$; *a*=-k·V^2.

IV. Материальная точка движется вдоль оси OX согласно закону x(t). Найти скорость и ускорение движения в начальный момент времени. Описать характер движения и схематически изобразить движение материальной точки, если:

а). x(t)=$\frac{3}{4}-8t+\frac{5}{6}t^2$

$V(t)=x'(t)=-8+\frac{5}{3}t; V(0)=-8$ (м/с)

$a(t) = V'(t) = \frac{5}{3}\ a = \frac{5}{3}$ (м/с^2)



$\overline{V_{0x}}$

x

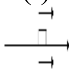
$\vec{a}$

Равнозамедленное движение в сторону, противоположную оси OX.

б). $x(t) = \sqrt{3} + 5t + \frac{1}{2}t^2$

V(t)=x′(t)=5+t; V(0) 5 (м/с)

a(t)=V′(t)=1; a=1 (м/с^2)



$\overline{V_{0x}}$

x

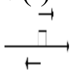
$\vec{a}$

Равноускоренное движение в сторону оси OX.

в). x(t)=-$\frac{3}{4}t^2 + \frac{7}{2}t - 2\sqrt{5}$;

V(t)=x′(t)=-$\frac{3}{2}t + \frac{7}{2}t$; V(0)= $\frac{7}{2}$ =3,5 (м/с)

a(t)=V′(t)=-1,5; a=-1,5 (м/с^2)



$\overline{V_{0x}}$

x

$\vec{a}$

Равнозамедленное движение в сторону оси OX.

V. Материальная точка движется по прямой. Уравнение движения: S(t)= $t^3 - 3\frac{t^2}{2} + 2t - 1$ (м). Найдите ее скорость в момент времени t=3 (с). В какой момент времени ускорение будет равно 9 м/с^2?

Решение: а). V(t)=S′(t)=3t^2-3t+2;

V(3)=27-9+2=20 (м/с).

б). a(t)=V′(t)=6t-3;

6t-3=9; 6t=12; t=2 (с).

Ответ: V(3)=20 м/с; a=9 м/с^2 в момент времени t=2с.

VI. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону φ(t). Найти угловую скорость и угловое ускорение движения. Дать характеристику движения, если:

A

$\vec{E}$ $\overrightarrow{\omega_a}$

O $\vec{y}$

B

$\overrightarrow{\omega_b}$

а) φ(t)=12t+4

$\omega(t) = \varphi'(t) = 12(рад/с)$

E(t)=$\omega'(t) = 0$

$\omega = const$

E=0 Равномерное движение по окружности.

б). φ(t)=5t^3+6t

$\omega(t) = \varphi'(t) = 15t^2 + 6$

E(t)= $\omega'(t) = 30t$

$\omega \neq const$

$\varepsilon = const$ Неравномерное движение по окружности.

в). φ(t)=2t^2+8t

$\omega(t) = \varphi'(t) = 4t + 8$

E(t)= $\omega'(t) = 4$

$\omega \neq const$

$\varepsilon \neq const$ Равнопеременное движение по окружности.

VII. Тело массой 5 кг движется прямолинейно по закону S(t)=(5-t)(2t-6)+50. Найти кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

Решение: $E_к = \frac{mv^2}{2}$

V(t)=S′(t)=-(2t-6)+2(5-t)=-2t+6+10-2t=-4t+16

V(t_0)=-4·2+16=-8+16=8 (м/с)

$E_к = \frac{5 \cdot 64}{2} = 5 \cdot 32 = 160$ (Дж)

Ответ: $E_к$=160Дж.

VIII. Материальная точка массой 10 кг движется прямолинейно по законуS(t)= $2t^3 - \frac{5t^2}{2} - 7t + 3$. Найти скорость и силу, действующую на эту точку в момент времени t=1c.

Решение: F=ma

V(t)=S′(t)=6t^2-5t-7

V(t_0)=6-5-7=-6 (м/с)

a(t)=12t-5; a(t_0)=12-5=7 (м/с^2)

F=10·7=70 (Н)

Ответ: F=70 Н.

IX. Температура тела изменяется в зависимости от времени по закону T=100-$\frac{4}{t+1}$.

а). Какова скорость изменения температуры тела в момент времени t=1c?

б). В какой момент времени скорость изменения температуры равна 4^0 в секунду?

Решение: а) $T' = \frac{4}{(t+1)^2}; T'(1) = \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1^0$ (в сек)

б) $\frac{4}{(t+1)^2} = 4;$ (t+1)^2=16; t+1=4; t=3 (с)

Ответ: а) скорость изменения температуры 1^0 в сек.

б) скорость изменения температуры 4^0 в сек достигается в момент времени 3с.

1 вариант

1. Материальная точка движется по прямой согласно закону $s(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$, где $s(t)$ - путь в метрах и t – время в секундах. В какой момент времени из промежутка [4;10] скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой скорости?

2. Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.
3. Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать13,5 л жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?

2 вариант

1. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, изменяется по закону $v(t)=\frac{1}{6}t^3-12t$ (скорость измеряется в метрах в секунду). В какой момент времени ускорение движения будет наименьшим, если движение рассматривать за промежуток от 10 с до 50 с?
2. Число 4 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.
3. Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнено 1 любое задание
«Неудовлетворительно»	Не выполнено ни одно задание

Практическая работа №14 Тренажеры по теме: Первообразная

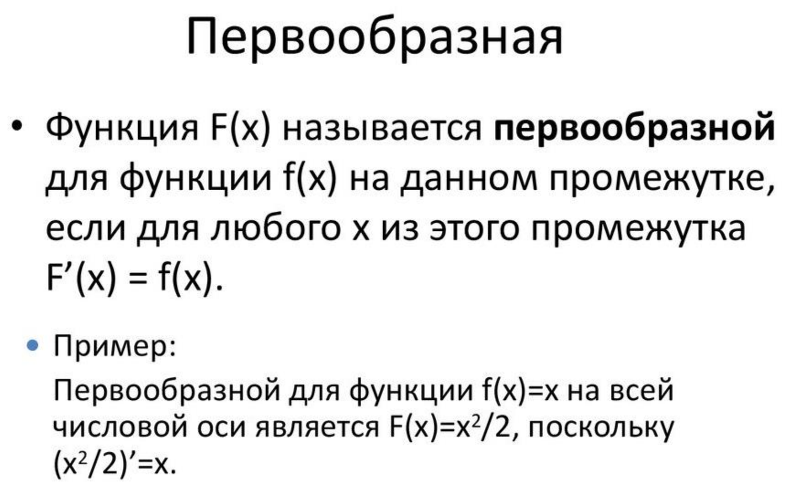


ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция f(x)	Первообразная F(x)
k	kx+c
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
sin x	-cos x +c
cos x	sin x +c
$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg x +c
$\frac{1}{\sin^2 x}$	- ctg x+c
e^x	e^x+c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	arctg x+c
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin x +c

1 вариант

1. Является ли функция F первообразной для функции fна указанном промежутке:
   а) $F(x)=x^5,\quad f(x)=5x^4,\quad x\in(-\infty;+\infty)$;
   б) $F(x)=-\frac{1}{6}x^{-6},\quad f(x)=x^{-7},\quad x\in(0;+\infty)$;
   в) $F(x)=5-x^4,\quad f(x)=4x^3,\quad x\in(-\infty;+\infty)$;
   г) $F(x)=\cos x-4,\quad f(x)=-\sin x,\quad x\in(-\infty;+\infty)$.
2. Найдите общий вид первообразных для функций:
   а) $f(x)=2-x^4$;
   б) $f(x)=x+\cos x$;
   в) $f(x)=2-x^3+\frac{2}{x^3}$;
   г) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\cos^2 x}+2x$.

1 вариант

1. Является ли функция F первообразной для функции fна указанном промежутке:
   а) $F(x)=x^{-3},\quad f(x)=-3x^{-4},\quad x\in(0;+\infty)$;
   б) $F(x)=\frac{1}{7}x^7,\quad f(x)=x^6,\quad x\in(-\infty;+\infty)$;

в) $F(x) = 3 - \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad x \in (-\infty;+\infty)$;

г) $F(x) = x^{-2} + 2, \quad f(x) = \dfrac{1}{2x^3}, \quad x \in (0;+\infty)$.

2. Найдите общий вид первообразных для функций:

а) $f(x) = x^5 + 3$;

б) $f(x) = \sin x - 4$;

в) $f(x) = 4 + x^4 - \dfrac{3}{x^5}$;

г) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sin^2 x} + 4x$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 6-7 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 4-5 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 4 заданий

Практическая работа №15 Тренажеры по теме: Теорема Ньютона-Лейбница

Определение 1. Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(t)$ сверху, отрезком $[a, b]$ снизу, а справа и слева отрезками прямых $t = a$ и $t = b$ (рис. 2), называют ***криволинейной трапецией.***

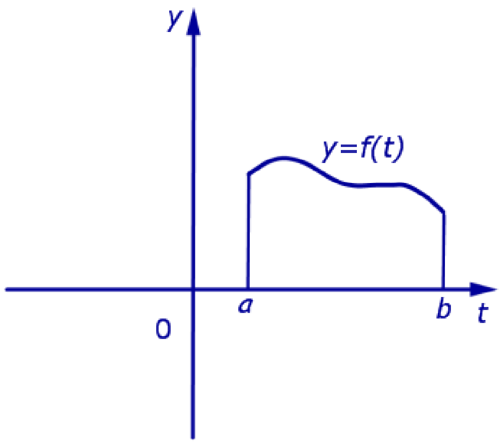


Рис.2

Определение 2. Число, равное площади криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 2, называют ***определенным интегралом*** от функции $f(t)$ в пределах от a до b и обозначают

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

Формула (1) **читается так**: «Интеграл от a до b от функции $f(t)$ по dt»

Определение 3. В формуле (1) функцию $f(t)$ называют ***подынтегральной функцией,***переменную t называют ***переменной интегрирования,*** отрезок

$[a, b]$ называют ***отрезком интегрирования,*** число b называют ***верхним пределом интегрирования,*** а число a – ***нижним пределом интегрирования.***

Производная от определенного интеграла по верхнему пределу

Если обозначить $S(x)$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной с боков отрезками прямых $t = a$ и $t = x$ (рис. 3),

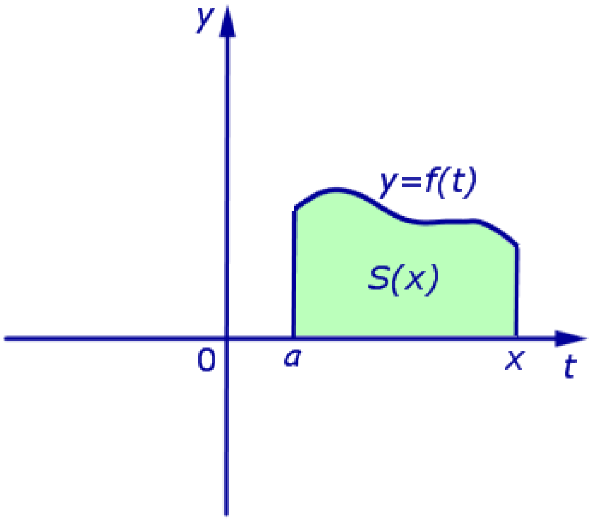


Рис.3

то будет справедлива формула

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Теорема 1. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу интегрирования равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе интегрирования.

Другими словами, справедлива формула

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Доказательство. Из формулы (2) следует, что

$$S(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt\,,$$

где через Δx обозначено приращение аргумента x (рис. 4)

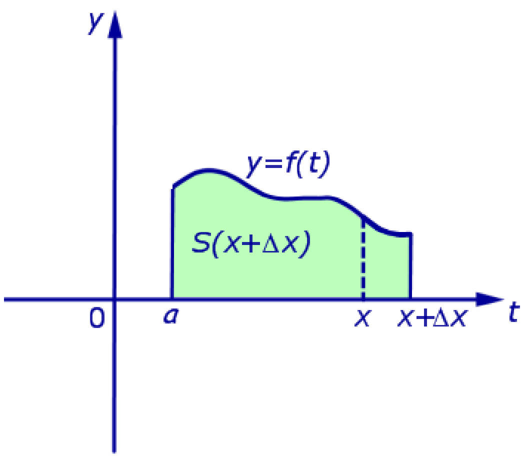


Рис.4

Из формул (3) и (2) получаем, что

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt\,,$$

1 вариант

Вычислите интеграл:

1) $\int_{-1}^{1} x^5 dx;$

2) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ \ dx;$

3) $\int_{0}^{1} e^x dx;$

4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x};$

5) $\int_{0}^{1} (2x - 3x^2)\, dx$

2 вариант

Вычислите интеграл:

1) $\int_{-2}^{1} 4x^3 dx;$

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx;$

3) $\int_{0}^{1} 5^x dx;$

4) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 x};$

5) $\int_{-1}^{2} (3 - x^2)\, dx$

3 вариант

Вычислите интеграл:

1) $\int_{0}^{2} 2x^4\,dx;$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx;$

3) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x};$

4) $\int_{-1}^{2} e^x\,dx;$

5) $\int_{0}^{1} (6x^2 - 2)\,dx$

4 вариант

Вычислите интеграл:

1) $\int_{-2}^{3} 2dx;$

2) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx;$

3) $\int_{0}^{2} 7^x\,dx;$

4) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\,dx}{\cos^2 x};$

5) $\int_{-1}^{1} (3x - 7x^6)\,dx$

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №16 Тренажеры по теме: Вероятность и ее свойства

Цель: освоить навыки решения задач по теории вероятностей.

Методические указания.

Случайным называют событие, которое может произойти или не произойти во время наблюдения или испытания. Пусть при проведения (бросание монеты или кубика, вытягивание экзаменационного билета и т.д.) возможны n равновозможных исходов. Например, при подбрасывании монеты число всех исходов n равно 2, так как кроме «решки» или «орла» других исходов быть не может. При броске игрального кубика возможны 6 исходов, так как на верхней грани кубика равновозможно появление любого числа от 1 до 6. Пусть также некоторому событию А благоприятствует m исходов.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов. Пишем

$P(A) = \frac{m}{n}$. Например, пусть событие А состоит в выпадении нечётного числа очков при бросании кубика. Всего возможны 6 исходов: выпадение на верхней грани кубика 1,2,3,4,5,6. При этом благоприятными для события А являются исходы с выпадением 1,3,5. Таким образом, $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство $0 \leq P \leq 1.$ Если у вас в ответе вероятность получается больше 1, значит, вы где-то ошиблись и решение нужно перепроверить.

1 вариант

Решите задачи, пользуясь классическим определением вероятности:

1. В урне 20 белых и 25 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найдите вероятность того, что этот шар – белый.
2. Задумано двузначное число. Найдите вероятность того, что задуманным числом окажется:
   а) случайно названное двузначное число;
   б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.
3. В первом ящике лежит 20 деталей, из них 13 стандартных; во втором – 30 деталей (26 стандартных); в третьем – 10 деталей (7 стандартных). Найдите вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

2 вариант

Решите задачи, пользуясь классическим определением вероятности:

1. В урне 10 белых шаров, 26 черных, 15 синих и 14 красных. Из урны вынимают наугад один шар. Найдите вероятность того, что этот шар окажется цветным.
2. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность следующих событий:
   а) сумма выпавших очков равна 6;
   б) сумма выпавших очков равна 8, а разность 3.
3. В экзаменационный билет входит 4 вопроса программы, насчитывающей 45 вопросов. Абитуриент не знает ответа на 15 вопросов программы. Какова вероятность того, что он вытянет билет, где все вопросы ему известны?

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнено любое 1 задания
«Неудовлетворительно»	Не выполнено ни одного задания

Практическая работа №17 Тренажеры по теме: Повторные испытания

Что такое ***независимые испытания***? Практически всё понятно уже из самого названия. Пусть производится несколько испытаний. Если вероятность появления некоего события A в каждом из них **не зависит** от исходов остальных испытаний, то… заканчиваем фразу хором =) Молодцы. При этом под словосочетанием «независимые испытания» часто подразумевают ***повторные независимые испытания*** – когда они осуществляются друг за другом.

Простейшие примеры:

– монета подбрасывается 10 раз;

– игральная кость подбрасывается 20 раз.

Совершенно ясно, что вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании не зависит от результатов других бросков. Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для кубика.

А вот последовательное извлечение карт из колоды не является серией независимых испытаний – как вы помните, это цепочка **зависимых событий**. Однако если карту каждый раз возвращать обратно, то ситуация станет «такой, какой надо».

Спешу обрадовать – у нас в гостях очередной Терминатор, который абсолютно равнодушен к своим удачам/неудачам, и поэтому его стрельба представляет собой образец стабильности =):

Задача 1

Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна p . Найти вероятность того, что:

а) стрелок попадёт только один раз;

б) стрелок попадёт 2 раза.

Решение: условие сформулировано **в общем виде** и вероятность попадания в мишень при каждом выстреле считается известной. Она равна p *(если совсем тяжко, присвойте параметру какое-нибудь конкретное значение, например,* $p = 0{,}6$ *).*

Коль скоро, мы знаем p , то легко найти вероятность промаха в каждом выстреле: $q = 1 - p$, то есть, «ку» – это тоже известная нам величина.

а) Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт только один раз»* и обозначим его вероятность через P_4^1 *(индексы понимаются как «одно попадание из четырёх»).*

Данное событие состоит в 4 несовместных исходах: стрелок попадёт в 1-й **или** во 2-й **или** в 3-й **или** в 4-й попытке.

По **теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий**:

$$P_4^1 = pqqq + qpqq + qqpq + qqqp$$

Внимание! *Если вам НЕ ПОНЯТНА эта запись, пожалуйста, вернитесь к предыдущему уроку по вышеприведённой ссылке!*

Упростим результат с помощью комбинаторной **формулы количества сочетаний**:
$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать попытку, в которой стрелок попал.
И, поскольку в каждом случае имеет место 1 попадание и 3 промаха, то:
$P_4^1 = C_4^1 pq^3 = 4pq^3$ – вероятность того, что стрелок попадёт только один раз из четырёх
…Как-то так «с лёгкой руки» я начал называть повторные независимые испытания «попытками», что не в каждой задаче может быть корректным… …ну да ладно.
б) Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт два раза»* и обозначим его вероятность через P_4^2 *(«два попадания из четырёх»)*. Здесь вариантов становится больше, попадания возможны:
в 1-й и 2-й попытках
или
в 1-й и 3-й попытках
или
в 1-й и 4-й попытках
или
во 2-й и 3-й попытках
или
во 2-й и 4-й попытках
или
в 3-й и 4-й попытках.
Таким образом, по тем же **теоремам сложения и умножения вероятностей**:
$P_4^2 = ppqq + pqpq + pqqp + qppq + qpqp + qqpp$
Можно ли так решать задачу? Безусловно, можно. Но что делать, если серия состоит из 5, 6 или бОльшего количества выстрелов? Тут уже будут получаться десятки слагаемых, запись которых отнимет много времени и места. В этой связи рациональнее придерживаться более компактной схемы:
$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$ способами *(перечислены выше)* можно выбрать 2 попытки, в которых произойдут попадания.
И, поскольку в любом исходе ровно 2 попадания и 2 промаха, то:
$P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2 = 6p^2q^2$ – вероятность того, что стрелок попадёт 2 раза из 4.
Ответ: а) $4pq^3$, б) $6p^2q^2$

Итак – вероятность того, что будет 1 попадание из 4, равна $P_4^1 = C_4^1 pq^3$, вероятность того, что будет 2 попадания из 4, равна $P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2$ … не замечаете ли вы закономерности?
Только что на конкретном примере мы повторили путь Якоба Бернулли, который несколько веков назад вывел формулу, названную позже в его честь:
– Вероятность P_n^m того, что **в** n **независимых испытаниях** некоторое случайное событие A наступит **ровно** m **раз**, равна:
$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где:
p – вероятность появления события A в каждом испытании;
$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом испытании.

Коэффициент C_n^m часто называют ***биномиальным коэффициентом***.
Примечание: *формула Бернулли справедлива только для тех независимых испытаний, в которых вероятность* p *события* A *сохраняется постоянной. Но на практике в*

результате испытаний могут появляться разные события с разными вероятностями – в этом случае работает другая формула. Соответствующие примеры можно найти, например, в типовых ***расчётах из сборника Чудесенко*** *(Задача 18).*
За примером далеко ходить не будем:
Задача 2
Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет 3 раза.
Решение: сначала немного порассуждаем: всего проводится 10 повторных независимых испытаний. Сколькими способами можно выбрать 3 испытания, в которых выпадет орёл?

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}=120$$ способами!

Это что же получается – записывать 120 слагаемых, в каждом из которых 10 множителей? =)
Используем формулу Бернулли: $P_n^m=C_n^m p^m q^{n-m}$, в данном случае:
$n=10$ – всего испытаний;
$m=3$ – количество испытаний, в которых должен появиться орёл;
$p=\frac{1}{2}$ – вероятность появления орла в каждом испытании;
$q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ – вероятность появления решки в каждом испытании.
Таким образом:

$$P_{10}^{3}=C_{10}^{3}p^3q^7=120\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{120}{1024}=0{,}1171875$$ – вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет ровно 3 раза.

Ответ: $P_{10}^{3}\approx 0{,}12$
Следует отметить, что *повторный характер* независимых испытаний не является «жизненно важным» (необходимым) условием для применения формулы Бернулли. Рассмотрим похожую задачу *(которая, кстати, эквивалентна Задаче 8 урока о* ***классическом определении вероятности****)*:
Найти вероятность того, что при броске 10 монет орёл выпадет на 3 монетах.
Здесь испытания не повторяются, а скорее, производятся одновременно, но, тем не менее, работает та же самая формула: $P_{10}^{3}=C_{10}^{3}p^3q^7=...=0{,}1171875$.
Решение будет отличаться смыслом и некоторыми комментариями, в частности:
$C_{10}^{3}=120$ способами можно выбрать 3 монеты, на которых выпадет орёл.
$p=\frac{1}{2}$ – вероятность выпадения орла на каждой из 10 монет
и т.д.
Однако на практике подобные задачи встречаются не столь часто, и, видимо, по этой причине формула Бернулли чуть ли не стереотипно ассоциируется только с повторными испытаниями. Хотя, как только что было показано, повторяемость вовсе не обязательна.
Следующая задача для самостоятельного решения:
Задача 3
Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков:

а) не выпадут *(выпадут 0 раз)*;
б) выпадут 2 раза;
в) выпадут 5 раз.
Результаты округлить до 4 знаков после запятой.
Краткое решение и ответ в конце урока.
Очевидно, что в рассматриваемых примерах некоторые события более вероятны, а некоторые – менее вероятны. Так, например, при 6 бросках кубика даже безо всяких расчётов интуитивно понятно, что вероятности событий пунктов «а» и «бэ» значительно больше вероятности того, что «пятёрка» выпадет 5 раз. А теперь поставим задачу найти

НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ число появлений события A в n независимых испытаниях

Опять же на уровне интуиции в Задаче №3 можно сделать вывод о том, что наивероятнейшее количество появлений «пятёрки» равно единице – ведь всего граней шесть, и при 6 бросках кубика каждая из них должна выпасть в среднем по одному разу. Желающие могут вычислить вероятность P_6^1 и посмотреть, будет ли она больше «конкурирующих» значений P_6^0 и P_6^2.

Сформулируем строгий критерий: для отыскания наивероятнейшего числа m_0 появлений случайного события A в n независимых испытаниях *(с вероятностью p в каждом испытании)* руководствуются следующим двойным неравенством:
$np - q \le m_0 < np + p$, причём:
1) если значение $np - q$ – дробное, то существует единственное наивероятнейшее число m_0;
в частности, если np – целое, то оно и есть наивероятнейшее число: $m_0 = np$;
2) если же $np - q$ – целое, то существуют **два** наивероятнейших числа: m_0 и $m_0 + 1$.
Наивероятнейшее число появлений «пятёрки» при 6 бросках кубика подпадает под частный случай первого пункта:

$$m_0 = np = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

В целях закрепления материала решим пару задач:
Задача 4
Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и соответствующую вероятность.
А это уже если и не Терминатор, то, как минимум, хладнокровный спортсмен =)
Решение: для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное неравенство $np - q \le m_0 < np + p$. В данном случае:
$n = 8$ – всего бросков;
$p = 0{,}3$ – вероятность попадания в корзину при каждом броске;
$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ – вероятность промаха при каждом броске.
Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в следующих пределах:

$$8 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \le m_0 < 8 \cdot 0{,}3 + 0{,}3$$

$$2{,}4 - 0{,}7 \le m_0 < 2{,}4 + 0{,}3$$

$$1{,}7 \le m_0 < 2{,}7$$

Поскольку левая граница – дробное число *(пункт №1)*, то существует единственное наивероятнейшее значение, и, очевидно, что оно равно $m_0 = 2$.

Используя формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:

$$P_8^2 = C_8^2 \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^6 = 0{,}29647548$$

Ответ: $m_0 = 2$ – наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках,
$P_8^2 \approx 0{,}2965$ – соответствующая вероятность.

1 вариант

1. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что:
   a) выпадет четное число очков
   b) выпадет число очков, кратное трем.
2. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 р., на четыре билета – выигрыш по 50 р., на 10 билетов – выигрыш по 20 р., на 20 билетов – выигрыш по 10 р., на 165 билетов – выигрыш по 5 р., на 400 билетов – выигрыш по 1 р. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 рублей?
3. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.
4. В прямоугольник 5*4 см^2 вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

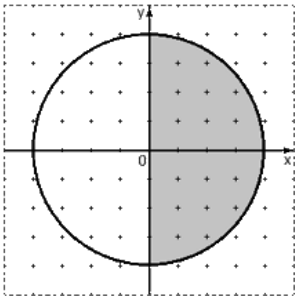
2 вариант

1. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что:
   c) выпадет нечетное число очков
   d) выпадет любое число очков, кроме 5.
2. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал её наугад. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.
3. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.
4. Внутри квадрата со стороной 10 см выделен круг радиусом 2 см. Случайным образом внутри квадрата отмечена точка. Какова вероятность того, что она попадет в выделенный круг?

3 вариант

1. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, м, р, т, ю. карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вытянутых по одной карточке можно прочесть слово «юрта».
2. В партии из 50 деталей имеется 3 бракованных. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.
3. В ящике находиться 4 белых и 1 черный шар. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты два белых шара.

4. Мишень имеет форму окружности радиуса 4. Какова вероятность попадания в ее правую половину, если попадание в любую точку мишени равновероятно? При этом промахи мимо мишени исключены.



4 вариант

1. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места?
2. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами А, К, К, Л, У. какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово «кукла»?
3. Из колоды карт в 36 листов наугад вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что это дама треф и валет пик?
4. Дано: AB = 12 см, AM = 2 см, MN = 4 см. На отрезок AB случайным образом попадает точка X. Какова вероятность того, что X попадет на отрезок MB?

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Практическая работа №18 Тренажеры по теме: Равносильность уравнений

Равносильность уравнений

Определение 1: Два уравнения с одной переменной f(x)=g(x) и p(x)=h(x) называются **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Определение 2: Если каждый корень уравнения f(x)=g(x) (1) является в тоже время корнем уравнения p(x)=h(x) (2), то уравнение (2) называют **следствием** уравнения (1).

$$(1)\rightarrow(2)$$

Очевидно: Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

$$(1)\leftrightarrow(2)$$

Схема решения любого уравнения:

1.Технический этап. Осуществляется преобразование уравнения(1)→(2)→(3)→(4) …

2. *Анализ решения.* Все ли преобразования были равносильными?

3.*Проверка.*

Реализация данного плана связана с поиском ответов на четыре вопроса:

1. Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?
2. Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?
3. Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?
4. В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

1.Теоремы о равносильности уравнений.

«спокойные» теоремы:

Теорема 1. Если какой либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где a>0, a≠1) равносильно уравнению f(x)=g(x).

«беспокойные» теоремы:

Определение: Областью определения уравнения f(x)=g(x) или**областью допустимых значений (ОДЗ)** переменной называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения f(x) и g(x).

Теорема 4. Если обе части уравнения f(x)=g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), которое:

А) имеет смысл всюду в области определения (в ОДЗ) уравнения f(x)=g(x)
Б) нигде в этой области не обращается в 0 –
то получится уравнение f(x) h(x)=g(x) h(x), равносильное данному.
Следствие («спокойное» утверждение): Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения f(x)=g(x) неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень *n* получится уравнение, равносильное данному $f(x)^n = g(x)^n$.

Теорема 6. Если f(x) >0 и g(x) >0, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где a>0, a≠1, равносильно уравнению f(x)=g(x).

2. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие.

Если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4,5,6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировках теорем, то получится уравнение-следствие.
Некоторые переходы от одного уравнения к другому приводят к расширению области определения уравнения. Именно в добавленную часть ОДЗ и «проникают» посторонние корни.

Причины расширения области определения уравнения.

1. Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.
2. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени.
3. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Обязательна проверка всех найденных корней, если:

1. произошло расширение области определ6ения уравнения.
2. осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень.
3. выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

3. О проверке корней.

Как правило, самый легкий обходной путь проверки – по области определения (ОДЗ) заданного уравнения. Но не переоценивайте этот способ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения других причин нарушения равносильности, кроме расширения области определения, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется метод возведения в квадрат, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит; лучше, если это возможно, делать проверку подстановкой.

4. **О потере корней.**

Причины потери корней при решении уравнений:

1. деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение h(x) (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие h(x) $\neq 0$).
2. сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.
3. замена уравнения h (f(x))= h (g(x)) уравнением f(x)=g(x) в том случае, если функция y= h(x) – немонотонная функция.
   Этот метод можно применить только в том случае, если функция y= h(x) – монотонная функция.

1 вариант

1. Добавьте дополнительное условие так, чтобы уравнения
$a * b = d * b$и $a = d$ были равносильны
2. Решить 2-мя способами уравнение:
$2\sqrt{1 - x^2} = x - 2$ и сделать вывод
3. Равносильны ли уравнения:
$$5^{x+1} + 5^x = 750 \quad \text{и} \quad x^2 - 9 = 0?$$
4. Решить уравнение:
$\sin 4x = 0$ и вычислить полученный результат при $k = 0;\ \pm 2$
5. Найти корень уравнения:
$$\frac{2x - 9}{2x - 5} - \frac{3x}{2 - 3x} = 2$$

2 вариант

1. Добавьте дополнительное условие так, чтобы уравнения
$\sqrt{a} = b$ и $a = b^2$были равносильны
2. Решить 2-мя способами уравнение:
$\sqrt{x + 1} = x - 1$ и сделать вывод
3. Равносильны ли уравнения:
$6^{x+2} - 6^x = 35$ и $x^2 = 0$?
4. Решить уравнение:
$\cos 6x = 1$ и вычислить полученный результат при $k = 0;\ \pm\frac{1}{2}$
5. Найти корень уравнения:

$$\frac{2x-1}{x-3}+\frac{5-4x}{3-x}=6$$

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №19 Тренажеры по теме: Основные приемы решения уравнений

Решение уравнения – это процесс, состоящий в основном в замене заданного уравнения другим уравнением, ему равносильным. Такая замена называется **тождественным преобразованием**. Основные тождественные преобразования следующие:

1.Замена одного выражения другим, тождественно равным ему. Например, уравнение $(3x+2)^2 = 15x+10$ можно заменить следующим равносильным: $9x^2 + 12x + 4 = 15x + 10$.

2.Перенос членов уравнения из одной стороны в другую с обратными знаками. Так, в предыдущем уравнении мы можем перенести все его члены из правой части в левую со знаком « – »: $9x^2 + 12x + 4 – 15x – 10 = 0$, после чего получим: $9x^2 – 3x – 6 = 0$.

3.Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение (число), отличное от нуля. Это очень важно, так как новое уравнение может не быть равносильным предыдущему, если выражение, на которое мы умножаем или делим, может быть равно нулю.

П р и м е р . Уравнение $x – 1 = 0$ имеет единственный корень $x = 1$.
Умножив обе его части на $x – 3$, мы получим уравнение
$(x – 1)(x – 3) = 0$, у которого два корня: $x = 1$ и $x = 3$.
Последнее значение не является корнем заданного уравнения
$x – 1 = 0$. Это так называемый **посторонний корень**.
И наоборот, деление может привести к **потере корня**. Так
в нашем случае, если $(x – 1)(x – 3) = 0$ является исходным
уравнением, то корень $x = 3$ будет потерян при делении
обеих частей уравнения на $x – 3$.

В последнем уравнении (п.2) мы можем разделить все его члены на 3 (не ноль!) и окончательно получим:

$$3x^2 – x – 2 = 0 .$$

Это уравнение равносильно исходному:

$$(3x+2)^2 = 15x + 10 .$$

4.Можно возвести обе части уравнения в нечётную степень или извлечь из обеих частей уравнения корень нечётной степени. Необходимо помнить, что:

а) возведение в чётную степень может привести к приобретению посторонних корней;

б) неправильное извлечение корня чётной степени может привести к потере корней.

П р и м е р ы . Уравнение $7x = 35$ имеет единственный корень $x = 5$.
Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение:

$$49x^2 = 1225 .$$

имеющее два корня: $x = 5$ и $x = -5$. Последнее значение является посторонним корнем.
Неправильное извлечение квадратного корня из обеих частей уравнения $49x^2 = 1225$ даёт в результате $7x = 35$, и мы теряем корень $x = -5$.
Правильное извлечение квадратного корня приводит к уравнению: $|7x| = 35$, а следовательно, к двум случаям:

1) $7x = 35$, тогда $x = 5$; 2) $-7x = 35$, тогда $x = -5$.

Следовательно, при правильном извлечении квадратного корня мы не теряем корней уравнения.
Что значит правильно извлечь корень? Здесь мы встречаемся с очень важным понятием **арифметического корня**

1 вариант:

Выберите способ решения уравнения, и найдите его корни:

1. $x^3 + 3x^2 = 0;$
2. $4^x - 10 \cdot 2^x = 24;$
3. $\dfrac{4}{x^2+4} + \dfrac{5}{x^2+5} = 2;$
4. $x - 1 = \sqrt{x+5}$
5. $\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3 .$

2 вариант:

Выберите способ решения уравнения, и найдите его корни:

1. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 ;$
2. $5^x - 24 = \dfrac{25}{5^x} ;$
3. $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{29}{10} ;$
4. $(x^2 - 4)\sqrt{x+5} = 0 ;$
5. $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0 .$

Критерии оценивания:

Оценка	Обоснование оценивания
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 4 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 3 заданий

Практическая работа №20 Тренажеры по теме: Системы уравнений

Система уравнений – это группа уравнений, в которых одни и те же неизвестные подразумевают одни те же числа. Чтобы показать что уравнения рассматриваются как система, слева от них ставится фигурная скобка:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Решить систему уравнений – это значит найти общие решения для всех уравнений системы или убедится что решения нет.

Чтобы решить систему уравнений нужно исключить одно неизвестное, то есть из двух уравнений с двумя неизвестными составить одно уравнение с одним неизвестным. Исключить одно из неизвестных можно тремя способами: подстановкой, сравнением, сложением или вычитанием.

Способ подстановки

Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, нужно в одном из уравнений выразить одно неизвестное через другое и результат подставить в другое уравнение, которое после этого будет содержать только одно неизвестное. Затем находим значение этого неизвестного и подставляем его в первое уравнение, после этого находим значение второго неизвестного.

Рассмотрим решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Сначала найдём чему равен x в первом уравнении, для этого перенесём все члены уравнения, не содержащие неизвестное x, в правую часть:

$$x - 4y = 2$$
$$x = 2 + 4y$$

Так как x, на основании определения системы уравнений, имеет такое же значение и во втором уравнении, то подставляем его значение во второе уравнение и получаем уравнение с одним неизвестным:

$3x - 2y = 16$

$3(2 + 4y) - 2y = 16$

Решаем полученное уравнение, чтобы найти чему равен y. Как решать уравнения с одним неизвестным вы можете посмотреть в соответствующей теме.

$3(2 + 4y) - 2y = 16$

$6 + 12y - 2y = 16$

$6 + 10y = 16$

$10y = 16 - 6$

$10y = 10$

$y = 10 : 10$

$y = 1$

Мы определили что $y = 1$, теперь, для нахождения численного значения x, подставим значение y в преобразованное первое уравнение, где мы ранее нашли какому выражению равен x:

$$x = 2 + 4y = 2 + 4 \cdot 1 = 2 + 4 = 6$$

Ответ: $x = 6$, $y = 1$.

Способ сравнения

Способ сравнения – это частный случай подстановки. Чтобы решить систему уравнений способом сравнения, нужно в обоих уравнениях найти какому выражению будет равно одно и тоже неизвестное и приравнять полученные выражения друг к другу. Получившееся в результате уравнение позволяет узнать значение одного неизвестного, с помощью этого значения затем вычисляется значение второго неизвестного.

Например, для решение системы:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

найдём в обоих уравнениях чему равен y (можно сделать и наоборот – найти чему равен x):

$x - 4y = 2$	$3x - 2y = 16$
$-4y = 2 - x$	$-2y = 16 - 3x$
$y = (2 - x) : - 4$	$y = (16 - 3x) : -2$

Составляем из полученных выражений уравнение:

$$\frac{2 - x}{-4} = \frac{16 - 3x}{-2}$$

Решаем уравнение, чтобы узнать значение x:

$$\frac{2 - x}{-4} \cdot (-4) = \frac{16 - 3x}{-2} \cdot (-4)$$

$2 - x = 32 - 6x$

$2 - x + 6x = 32 - 2$

$5x = 30$

$x = 30 : 5$

$x = 6$

Теперь подставляем значение x в первое или второе уравнение системы и находим значение y:

$x - 4y = 2$	$3x - 2y = 16$
$6 - 4y = 2$	$3 \cdot 6 - 2y = 16$
$-4y = 2 - 6$	$-2y = 16 - 18$
$-4y = -4$	$-2y = -2$
$y = 1$	$y = 1$

Ответ: $x = 6$, $y = 1$.

Способ сложения или вычитания

Чтобы решить систему уравнений способом сложения, нужно составить из двух уравнений одно, сложив левые и правые части, при этом одно из неизвестных должно быть исключено из полученного уравнения. Неизвестное можно исключить уравняв при нём коэффициенты в обоих уравнениях.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Уравняем коэффициенты при неизвестном y, умножив все члены второго уравнения на -2:

$$(3x - 2y) \cdot -2 = 16 \cdot -2$$
$$-6x + 4y = -32$$

получим:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ -6x + 4y = -32 \end{cases}$$

Теперь сложим по частям оба уравнения, чтобы получить уравнение с одним неизвестным:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} x - 4y = 2 \\ -6x + 4y = -32 \end{array} \\ \hline -5x \quad = -30 \end{array}$$

Находим значение x ($x = 6$). Теперь подставив значение x в любое уравнение системы, найдём $y = 1$.

Если уравнять коэффициенты у x, то для исключения этого неизвестного нужно было бы вычесть одно уравнение из другого.

Уравняем коэффициенты при неизвестном x, умножив все члены первого уравнения на 3:

$$(x - 4y) \cdot 3 = 2 \cdot 3$$
$$3x - 12y = 6$$

получим:

$$\begin{cases} 3x - 12y = 6 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Теперь вычтем по частям второе уравнение из первого, чтобы получить уравнение с одним неизвестным:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 3x - 12y = 6 \\ 3x - 2y = 16 \end{array} \\ \hline -10y = -10 \end{array}$$

Находим значение y ($y = 1$). Теперь подставив значение y в любое уравнение системы, найдём $x = 6$:

$3x - 2y = 16$

$3x - 2 \cdot 1 = 16$

$3x - 2 = 16$

$3x = 16 + 2$

$3x = 18$

$x = 18 : 3$

$x = 6$

Ответ: $x = 6$, $y = 1$.

Для решения системы уравнений, рассмотренной выше, был использован способ сложения, который основан на следующем свойстве:

Любое уравнение системы можно заменить на уравнение, получаемое путём сложения (или вычитания) уравнений, входящих в систему. При этом получается система уравнений, имеющая те же решения, что и исходная.

1 вариант:

1. $\begin{cases} x+xy=3 \\ xy^2+xy^3=12 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} 2\cdot 6^x-3y=69 \\ 6^{x-1}-y=5 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x+y=\pi \\ \cos x-\cos y=1 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2 \\ \log_{48} x+\log_{48} y=1 \end{cases}$.

2 вариант:

1. $\begin{cases} x^3-y^3=218 \\ x^2+xy+y^2=109 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} 3^x+3^y=12 \\ 6^{x+y}=216 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x+\sin y=1 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=2 \\ \log_5 x-\log_5 y=4 \end{cases}$.

Критерии оценивания:

Оценка	**Обоснование оценивания**
«Отлично»	Все задания выполнены правильно
«Хорошо»	Правильно выполнены любые 3 задания
«Удовлетворительно»	Правильно выполнены любые 2 задания
«Неудовлетворительно»	Правильно выполнено менее 2 заданий

Использованная литература:

1. Башмаков М.И., Математика. Задачник : учеб. пособие для образоват. Учреждений нач. и сред. проф. Образования / М.И. Башмаков. – 2-е изд.,стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 416 с.
2. Башмаков М.И., Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2014г. – 256 с.
3. Башмаков М.И., Математика (базовый уровень): учебник для 11 класса: среднее общее образование / М.И. Башмаков.– М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 320 с
4. Башмаков М.И., Математика (базовый уровень): учебник для 10 класса: среднее общее образование / М.И. Башмаков.– М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 304 с
5. Башмаков М.И., Математика 10 класс: сборник задач: среднее общее образование / М.И. Башмаков.– М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 272 с
6. Башмаков М.И., Математика 11 класс: сборник задач: среднее (полное) общее образование / М.И. Башмаков.– 3-е изд. - М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 288 с
7. Гусев В.А., Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образоват. учреждений нач. и сред. проф. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 384с.
8. «Виктория плюс», Математика в таблицах и схемах. Для школьников и абитуриентов. Изд. 2-е, испр.и доп. СПб, «Виктория плюс», 2012. – 224 стр.
9. Ершова А.П., Голобородько В.В., Вся школьная математика в самостоятельных и контрольных работах. Алгебра 7-11. – М.: Илекса, 2010, - 640 с.
10. Мордкович А.Г., Алгебра 9 класс : методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 72с.: ил.
11. Ольховая Л.С., Математика. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. – 176с. – (Готовимся к ЕГЭ).
12. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс.- М.:ВАКО,2011. - 352с. - (В помощь школьному учителю).